

Beiträge zur Approximation von elektrischen Zweipolen

von
Uwe Hansen
aus
Ansbach

Erlangen 1980

1090 M333

Beiträge zur Approximation von elektrischen Zweipolen

Der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg
zur Erlangung des Grades
Doktor
der Ingenieurwissenschaften

vorgelegt

von

Uwe Hansen

aus

Ansbach

Erlangen 1980



Als Dissertation genehmigt von
der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung: 26. 2. 80

Tag der Promotion: 9. 7. 80

Dekan: Prof. Dr.-Ing. H. Niemann
Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. R. Unbehauen
Prof. Dr.-Ing. W. Schüßler

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1 EINLEITUNG	1
2 RECHNERGESTÜTZTER SCHALTUNGSENTWURF	7
2.1 Struktur und Anfangswerte	8
2.2 Schaltungsapproximation durch Optimierung	12
2.3 Berücksichtigung von Nebenbedingungen	24
2.4 Spezielle Schaltungsstrukturen	27
2.5 Allgemeine Gesichtspunkte bei der Ortskurven- approximation durch Schaltungsoptimierung	35
3 APPROXIMATION DURCH NICHT RATIONALE FUNKTIONEN	37
4 ZWEIPOLFUNKTIONEN IN PARAMETRISCHER DARSTELLUNG	73
4.1 Zweipolfunktionen, die sich mit nur zwei Elemente- arten realisieren lassen	74
4.2 Allgemeine Zweipolfunktionen in parametrischer Dar- stellung	77
5 WEITERE APPROXIMATIONSVERFAHREN	90
5.1 Approximation von Betrag oder Realteil	91
5.2 Interpolation	95
5.3 Eine Programmstruktur zur interaktiven Lösung des Approximationsproblems	101

6	BEISPIELE	108
	ZUSAMMENFASSUNG	142
	LITERATURVERZEICHNIS	143

1 EINLEITUNG

Elektrische Netzwerke, die ausschließlich aus linearen, zeitlich konstanten und konzentrierten Elementen, nämlich Ohmwiderständen (R), Induktivitäten (L), Kapazitäten (C) und Übertragern (U) aufgebaut sind, lassen sich im Frequenzbereich durch rationale Funktionen beschreiben.

Ist ein RLCU-Netzwerk von außen nur über zwei Klemmen zugänglich (Bild 1.1), so ist die Impedanz $Z(p)$ eine das Verhalten dieses Netzwerkes bezüglich der beiden betrachteten Klemmen kennzeichnende Funktion. Als Variable wird hierbei der komplexwertige Frequenzparameter

$$p = G + j\omega$$

verwendet.

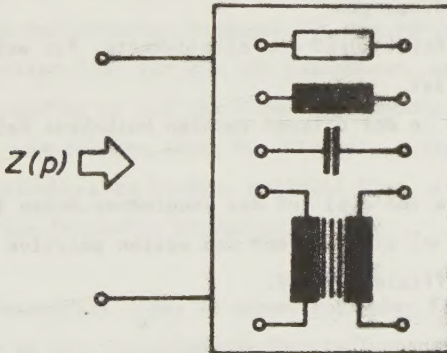


Bild 1.1: RLCU-Zweipol

Funktionen $Z(p)$, die sich als Impedanz entsprechend Bild 1.1 realisieren lassen, werden Zweipolfunktionen genannt. Notwendige und hinreichende Eigenschaften einer Zweipolfunktion können folgendermaßen formuliert werden [20]:

Satz 1: Die Funktion $Z(p)$ ist genau dann Zweipolfunktion, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- a) $Z(p)$ ist rational,
- b) $Z(p)$ ist reell, d.h. für reelle Werte von p ist $Z(p)$ reell,
- c) $Z(p)$ ist positiv, d.h. es gilt $\operatorname{Re}\{Z(p)\} > 0$ für $\operatorname{Re}\{p\} > 0$.

Die direkte Prüfung der Bedingung c) von Satz 1 bereitet im allgemeinen Schwierigkeiten, da die gesamte Halbebene $\operatorname{Re}\{p\} > 0$ zu betrachten ist. Abhilfe schafft hier

Satz 2: Notwendig und hinreichend dafür, daß eine rationale reelle Funktion $Z(p)$ positiv, also Zweipolfunktion ist, sind die folgenden Bedingungen:

- a) Es gilt $\operatorname{Re}\{Z(j\omega)\} \geq 0$ für alle ω -Werte, für welche $Z(j\omega)$ endlich ist.
- b) $Z(p)$ hat in der offenen rechten Halbebene $\operatorname{Re}\{p\} > 0$ keine Pole.
- c) Alle Pole von $Z(p)$ auf der imaginären Achse (einschließlich $p = \infty$) sind einfach und weisen positive Entwicklungskoeffizienten auf.

Die vorliegende Arbeit zeigt, wie eine komplexwertige Vorschrift $Z_0(\omega)$, welche in einem Frequenzbereich $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ gegeben ist, durch eine Zweipolfunktion $Z(p)$ mit $p = j\omega$ in dem angegebenen

Frequenzbereich angenähert werden kann. Hierbei sind zwei prinzipiell verschiedene Lösungsmöglichkeiten zu unterscheiden.

Da jede Zweipolfunktion $Z(p)$ als Eingangsimpedanz eines RLCU-Netzwerkes entsprechend Bild 1.1 realisiert werden kann, bedeutet dies, daß das beschriebene Approximationsproblem als gelöst zu betrachten ist, wenn für eine gegebene Vorschrift $Z_0(\omega)$ eine RLCU-Schaltung angegeben wird, deren Impedanz $Z(j\omega)$ die Vorschrift $Z_0(\omega)$ approximiert. Als Vorgehensweise liegt nahe, eine Strategie zu entwickeln, in welcher Weise die Bauelementewerte einer Schaltung zu verändern sind, um eine befriedigende Annäherung an die Vorschrift zu erlangen. Diese Lösungsmethode erscheint einfach, ist doch während des Optimierungsprozesses als einzige Nebenbedingung zu beachten, daß alle Bauelementewerte nicht negativ werden. Doch die Schwierigkeiten liegen an einer anderen Stelle: zunächst muß eine günstige Schaltungsstruktur gefunden werden sowie Anfangswerte für die Bauelemente.

Eine gegenüber der Schaltungsoptimierung prinzipiell andere Klasse von Lösungsmöglichkeiten besteht darin, die Vorschrift $Z_0(\omega)$ mit Hilfe eines analytischen Ansatzes für die rationale, reelle und positive Funktion $Z(p)$ für $p = j\omega$ anzunähern, wobei $Z(j\omega)$ von dem Frequenzparameter ω und von Parametern abhängt, die einer Optimierung zu unterziehen sind. Das Problem, zunächst eine günstige Schaltungsstruktur zu finden, entfällt hier, allerdings sind Startwerte für die Parameter anzugeben.

Ist eine Vorschrift $Z_0(\omega)$ in einem endlichen Frequenzintervall gegeben, wie es mit verschiedenen Darstellungsarten in Bild 1.2 angegeben ist, so muß die Lösung $Z(j\omega)$ zwei Bedingungen erfüllen:

- 1) die Vorschrift $Z_0(\omega)$ wird mit ausreichender Genauigkeit ange-

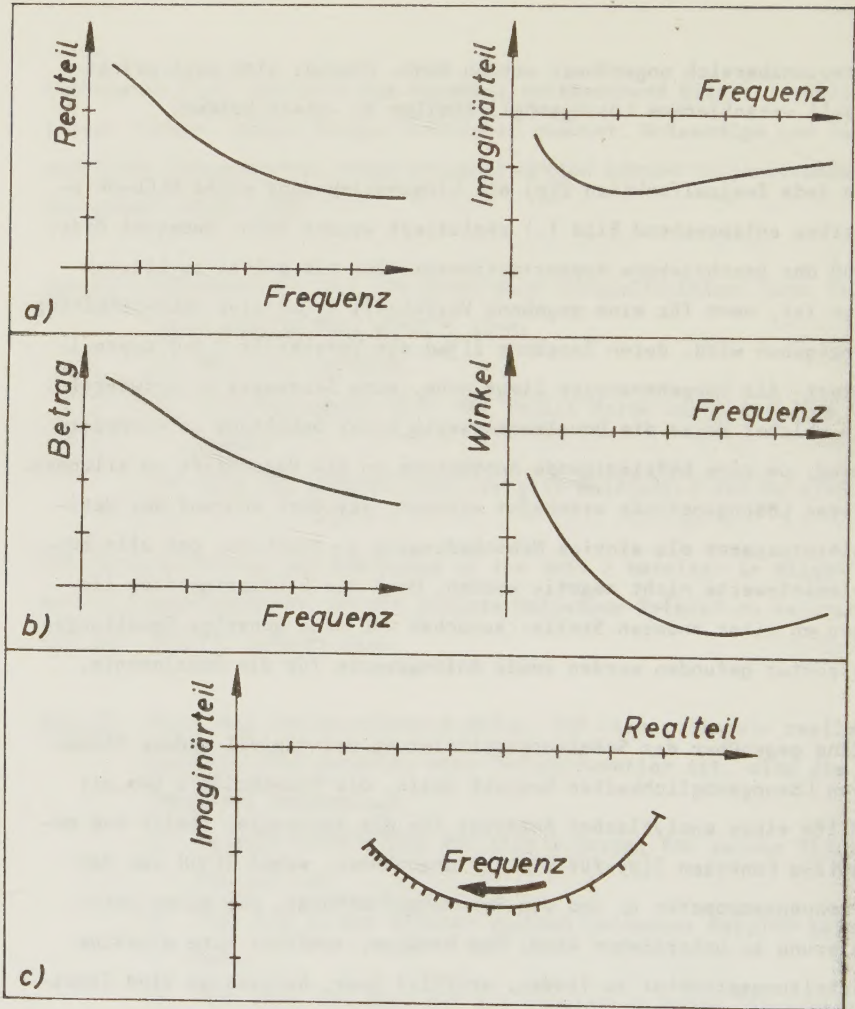


Bild 1.2: Darstellungsarten der Frequenzabhängigkeit einer Impedanz

$Z(j\omega)$ in einem Frequenzbereich

a) als Realteil und Imaginärteil: $Z(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$

b) als Betrag und Winkel: $Z(j\omega) = |Z(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$

c) als bezifferte Ortskurve

nähert;

- 2) $Z(j\omega)$ besitzt für $j\omega = p$ die in Satz 1 bzw. Satz 2 angegebenen Eigenschaften.

Hierbei beeinflusst insbesondere die für alle Frequenzen (Polstellen auf der imaginären Achse ausgenommen) einzuhaltende Bedingung $\operatorname{Re}\{Z(j\omega)\} \geq 0$ die Vorgehensweise bei der Approximation, denn dies bedeutet, daß neben Frequenzen aus dem Approximationsintervall weitere Frequenzen zu betrachten sind, falls diese Bedingung nicht bereits im Ansatz für $Z(p)$ berücksichtigt wird.

Zu bemerken ist, daß die Bedingung $\operatorname{Re}\{Z(j\omega)\} \geq 0$ bei der Approximation einer Übertragungsfunktion $H(p)$ eines passiven RLCU-Zweitores nicht berücksichtigt werden muß, da $H(p)$ eine rationale, reelle und in $\operatorname{Re}\{p\} \geq 0$ einschließlich $p = \infty$ polfreie Funktion darstellt [20].

Ist eine komplexwertige Vorschrift $Z_0(\omega)$ in einem Frequenzintervall gegeben, wobei dieses Intervall nicht den gesamten Frequenzbereich $0 \leq \omega \leq \infty$ umfaßt, so kann im allgemeinen diese Vorschrift nur dann beliebig genau durch eine Impedanz approximiert werden, wenn statt der Eingangsimpedanz eines RLCU-Zweipols die Reihenschaltung eines negativen Ohmwiderstandes mit einem RLCU-Zweipol zugelassen ist [22].

Ein weites Gebiet, in dem die Approximation einer Vorschrift durch eine Zweipolfunktion Anwendung findet, ist die Nachbildung des Eingangsverhaltens realer physikalischer Systeme, die passiv sind, aber nicht notwendigerweise nur konzentrierte Bauelemente enthalten.

Auch die Approximation der Übertragungsfunktion eines elektrischen Zweitores, welches mit der Struktur eines Überbrückten T-Gliedes aufzubauen ist, kann zurückgeführt werden auf die Aufgabe, eine Vorschrift durch eine Zweipolfunktion anzunähern [20].

Bei elektrischen Schaltungen mit aktiven Elementen kann ein Zweipol das frequenzmäßige Verhalten des Systems mit beeinflussen; beispielsweise kann durch die Wahl eines Zweipols im Rückkopplungszweig eines Verstärkers eine Kompensation durchgeführt werden oder ein gewünschtes Verhalten bezüglich der Frequenz erzielt werden.

Auch bei regelungstechnischen Problemen kann die Aufgabe bestehen, eine Zweipolfunktion nach gegebener Vorschrift zu ermitteln, wobei der dann realisierte Zweipol als Element eines größeren Systems zu betrachten ist und das Verhalten oder die Stabilität des gesamten Systems beeinflußt.

Herrn Prof. Dr.-Ing. R. Unbehauen, auf dessen Anregung diese Arbeit zurückgeht, gilt mein besonderer Dank für die wohlwollende Förderung und eingehende Durchsicht der Arbeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Schüßler danke ich für die Übernahme des Korreferats.

2 RECHNERGESTÜTZTER SCHALTUNGSENTWURF

Aufgabe der Netzwerksynthese ist es, Schaltungen zu finden, deren Verhalten vorgeschrieben ist. Diese Aufgabe ist gelöst, wenn für ein Problem eine Schaltungsstruktur angegeben wird einschließlich aller Bauelementewerte, wobei die in der Aufgabenstellung angegebenen Eigenschaften des Netzwerkes eingehalten werden.

Es ist möglich, die Lösung in zwei Schritten durchzuführen:

- a) Ermittlung einer für das Netzwerk charakteristischen Funktion, welche zugleich die gegebene Vorschrift erfüllt;
- b) Ermittlung mindestens eines Netzwerkes, welches die gefundene Funktion realisiert.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, bei Vorgabe einer Schaltungsstruktur die Bauelementewerte in geeigneter Weise so zu verändern, daß die Vorschrift erfüllt wird. Da hierzu meist umfangreiche Berechnungen durchzuführen sind, kann dabei auf die Hilfe eines programmierbaren Rechners nicht verzichtet werden. Diese Methode wird als rechnergestützter Entwurf elektrischer Netzwerke bezeichnet und gehört zu dem großen Problemkreis "Computer Aided Design" (CAD).

2.1 Struktur und Anfangswerte

Ein wesentlicher Bereich, in dem die Approximation von elektrischen Zweipolen Anwendung findet, ist die Nachbildung des Eingangsverhaltens realer physikalischer Gebilde. Zu denken ist beispielsweise an die Nachbildung der Eingangsimpedanz einer Leitung, d.h. ein System mit verteilten Parametern wird angenähert durch ein System mit einer endlichen Anzahl konzentrierter Bauelemente.

Sind Informationen über den Aufbau des nachzubildenden Systems vorhanden, so gelingt es in sehr vielen Fällen, eine günstige Struktur des nachzubildenden Systems anzugeben, wie es für eine Leitung in Bild 2.1 dargestellt ist.

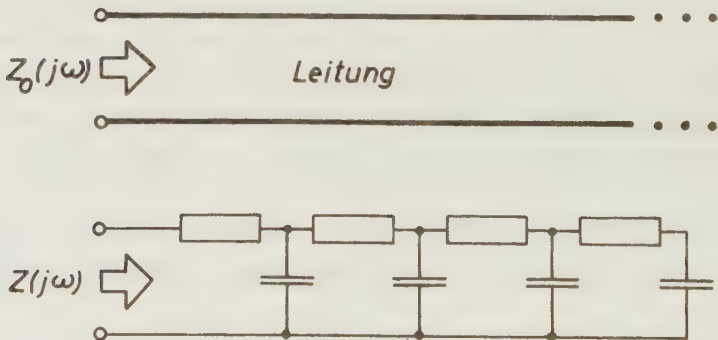


Bild 2.1: Vorschrift $Z_0(j\omega)$ und Nachbildung $Z(j\omega)$ einer Leitung

Offensichtlich ist, daß bei einer Leitungsnachbildung und bei allen Nachbildungen von Systemen mit verteilten Parametern die Güte der Annäherung um so größer ist, je mehr Bauelemente die Nachbildung enthält. Dies bedeutet, daß entweder die Güte der Annäherung oder aber die Anzahl der Bauelemente bzw. die Anzahl der Energiespeicher vorgeschrieben werden kann.

Bei Problemen der Nachbildung realer physikalischer Systeme können aus der Kenntnis des Aufbaus oft nicht nur sinnvolle Strukturen, sondern auch Näherungswerte für die Bauelementewerte angegeben werden.

Der Ortskurvenverlauf von Zweipolfunktionen vom Grade Eins oder Zwei ist bekannt oder läßt sich in einfacher Weise bestimmen, so daß beim Vorliegen einer Vorschrift in Form eines Ortskurvenstückes möglicherweise auf eine Zweipolfunktion oder Schaltung mit wenigen Energiespeichern zurückgegriffen werden kann, deren Ortskurve bekannt ist. Welche Probleme hierbei auftreten können, sei an Hand eines einfachen Beispiels aufgezeigt.

Als Vorschrift sei ein Stück kreisförmige Ortskurve gegeben, wie sie in Bild 2.2 dargestellt ist.

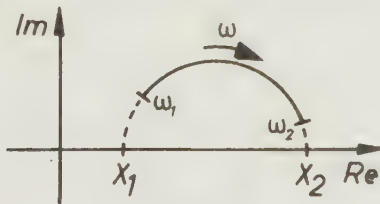


Bild 2.2: Vorschrift für eine Ortskurvenapproximation

Bekannt ist, daß Zweipolfunktionen der Form

$$Z(p) = \frac{ap + b}{p + c} \quad (2.1)$$

mit $a, b, c > 0$, $a > b/c$ für $p = j\omega$ und $0 \leq \omega \leq \infty$ eine Ortskurve besitzen, wie sie in Bild 2.3 dargestellt ist. Eine zugehörige Realisierung ist in Bild 2.4 aufgezeichnet.

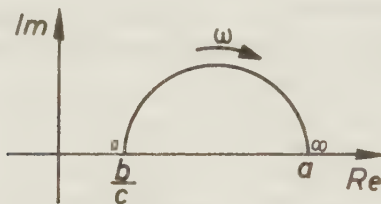


Bild 2.3: Ortskurve einer Zweipolfunktion nach Gl. (2.1)

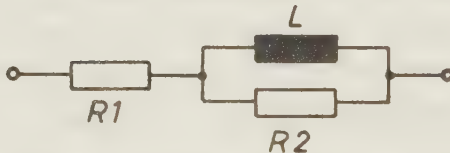


Bild 2.4: Schaltungsstruktur, welche eine Zweipolfunktion nach Gl. (2.1) realisiert

Mit der Zuordnung $X_1 = b/c$ und $X_2 = a$, dies bedeutet für die Schaltung nach Bild 2.4 $R_1 = X_1$ und $R_2 = X_2 - X_1$, haben Vorschrift und Approximation einen sich deckenden Ortskurvenverlauf, wobei die Parametrierung der Ortskurve nach der Frequenz noch nicht berücksichtigt ist. Um diese Parametrierung zu beeinflussen, steht bei der Schaltungsstruktur nach Bild 2.4 noch genau ein Freiheitsgrad, nämlich der Wert der Induktivität L , zur Verfügung. Ob es gelingt, durch Festlegung dieses Freiheitsgrades eine gute Annäherung an die

Vorschrift nach Bild 2.2 zu erzielen, hängt ab von der Parametrierung der Ortskurvenvorschrift nach der Frequenz sowie von der Wahl des Gütekriteriums.

Dieses einfache Beispiel zeigt, daß es zwar nicht lohnend erscheint, einen Katalog von Ortskurvenbildern für Zweipolfunktionen zu erstellen, aus dem direkt Lösungen zu entnehmen sind, doch können aus der Kenntnis von Ortskurvenverläufen für Zweipolfunktionen niederen Grades und für Schaltungen mit wenigen Energiespeichern sehr oft Hinweise gewonnen werden bezüglich der Wahl einer günstigen Schaltungsstruktur und Näherungen für die Bauelementewerte. Diese so gefundenen einfachen Strukturen lassen sich gegebenenfalls durch Hinzufügen weiterer Bauelemente ergänzen.

Ob die Methode, eine Ortskurvenapproximation durch direkte Schaltungsoptimierung durchzuführen, erfolgreich ist, hängt wesentlich vom Geschick und der Erfahrung des Anwenders ab, günstige Strukturen und Anfangswerte für die Bauelemente zu finden. Dies mag unbefriedigend erscheinen, doch ist zu bedenken, daß bei Vorhandensein schneller Analyseprogramme das Testen mehrerer Schaltungsstrukturen auf ihre Eignung wenig Aufwand bedeutet.

2.2 Schaltungsapproximation durch Optimierung

Um die Eingangsimpedanz $Z(j\omega)$ einer Schaltung einer gegebenen Vorschrift $Z_0(\omega)$ in einem Frequenzbereich anzunähern, ist eine Strategie notwendig, welche besagt, in welcher Weise die Bauelementewerte (ausgehend von Anfangswerten) zu verändern sind, um die Vorschrift bezüglich eines vorgegebenen Gütekriteriums möglichst gut zu approximieren. Es handelt sich hierbei um ein Optimierungsproblem, welches folgendermaßen formuliert werden kann:

Unter Berücksichtigung des vorgegebenen Gütekriteriums wird eine reelle Funktion $F(\underline{x})$ definiert, die Zielfunktion genannt wird und die abhängig ist von dem Parametervektor

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{NX})^T,$$

der alle für die Optimierung zur Verfügung stehenden Parameter x_i , $i=1,2,\dots,NX$ zusammenfaßt. Diese Zielfunktion ist zu minimieren, wobei bezüglich des Wertebereichs der Parameter noch Nebenbedingungen vorhanden sein können.

Eine wesentliche Nebenbedingung bei der Schaltungsapproximation stellt die Forderung dar, daß alle Bauelementewerte b_i , $i=1,2,\dots,NX$ einer der Optimierung unterzogenen RLC-Netzwerkes nicht negativ werden dürfen. Diese Nebenbedingung läßt sich in einfacher Weise durch die Transformation

$$b_i = x_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, NX \quad (2.2)$$

berücksichtigen, wobei dann für die Optimierparameter x_i keine Einschränkungen vorliegen. Ideale Übertrager spielen bei der Ortskurvenapproximation durch Schaltungsoptimierung keine wesentliche Rol-

le; festgekoppelte Übertrager werden an späterer Stelle behandelt.

In einer breit angelegten Untersuchung [10] wurden in der Praxis bewährte Optimierungsverfahren verglichen bezüglich ihrer Eignung für den rechnergestützten Schaltungsentwurf. Für Optimieraufgaben, bei denen sich Nebenbedingungen bezüglich der Optimierparameter nicht durch eine Transformation dieser Parameter behandeln lassen, wie es im einfachsten Fall im Ansatz nach Gl. (2.2) durchgeführt ist, ist es möglich, das Simplex-Verfahren nach [16] anzuwenden. Eine weitere Möglichkeit, Nebenbedingungen zu berücksichtigen, besteht darin, eine Penalty-Funktion oder eine Folge solcher Funktionen zu definieren und in den Optimierprozess mit einzubeziehen [6].

Die Untersuchung [10] zeigt, daß bei Problemen der Quadratsummenminimierung ein Verfahren GAUSS-NEWTON gegenüber allen anderen untersuchten Verfahren bei der Schaltungsapproximation die besten Ergebnisse liefert. Dieses Verfahren ist ausführlich in [8] und [24] beschrieben. Ein Programm [25] nach diesem Verfahren wurde für die meisten Ortskurvenapproximationen, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, verwendet.

Bezeichnet man mit $f_i(\underline{x}) = f(\omega_i, \underline{x})$ den reellen Fehler bei einer Ortskurvenapproximation für eine Frequenz $\omega = \omega_i$ aus dem Approximationsintervall, so ist

$$F(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{NF} f_i(\underline{x})^2 \quad (2.3)$$

die Zielfunktion, welche mit dem Programm [25] durch Veränderung des Parametervektors $\underline{x}$ unter Berücksichtigung aller Fehler in den Frequenzpunkten ω_i , $i=1,2, \dots, NF$ minimiert wird.

Neben der Berechnung der Fehler $f_i(\underline{x})$ ist es bei dem angegebenen Verfahren noch notwendig, alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_i(\underline{x})}{\partial x_k}, \quad k=1,2, \dots, NX$$

für alle betrachteten Frequenzpunkte ω_i , $i=1,2, \dots, NF$ zu bestimmen. Diese partiellen Ableitungen lassen sich zur Jacobi-Matrix

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{NX}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & . \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{NF}}{\partial x_1} & . & \dots & \frac{\partial f_{NF}}{\partial x_{NX}} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

zusammenfassen.

Wurde bisher pauschal von "Fehler" und "Gütekriterium" gesprochen, so sollen diese Begriffe nun präzisiert werden. Soll eine komplexwertige Vorschrift

$$Z_o(\omega) = X_o(\omega) + jY_o(\omega)$$

durch die Eingangsimpedanz

$$Z(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$$

einer Schaltung angenähert werden, so läßt sich eine frequenzabhängige, komplexwertige Funktion

$$\Delta Z(\omega) = [X(\omega) - X_o(\omega)] + j[Y(\omega) - Y_o(\omega)] = \Delta X(\omega) + j\Delta Y(\omega)$$

definieren. Eine reelle Fehlerfunktion ist dann

$$f(\omega) = |\Delta Z(\omega)| = \sqrt{\Delta X(\omega)^2 + \Delta Y(\omega)^2} \quad (2.5)$$

Verlangt man

$$F = \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(\omega)^2 d\omega \stackrel{!}{=} \text{Min},$$

so ist das mittlere Fehlerquadrat als erstes Gütekriterium angegeben.

Verwendet man NF Frequenzen aus dem Approximationsintervall, hier Stützpunkte genannt, so ist der Ansatz der Fehlerquadratsumme nach Gl. (2.3) ein gutes Maß für das mittlere Fehlerquadrat, falls die Anzahl NF groß genug ist und die Stützpunkte äquidistant verteilt sind. Eine nicht äquidistante Verteilung der Stützpunkte bedeutet eine frequenzabhängige Gewichtung des Fehlers.

Ein zweites Gütekriterium ist der maximale Betrag der Fehlerfunktion $f(\omega)$ in dem betrachteten Frequenzbereich. Für die durchzuführende Optimierung bedeutet dies, daß eine gleichmäßige Approximation anzustreben ist:

$$F = \max_{\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2} |f(\omega)| \stackrel{!}{=} \text{Min}.$$

In Bild 2.5 ist veranschaulicht, daß sich die annähernde Funktion $Z(j\omega)$ für jeden betrachteten Frequenzwert ω_i aus dem Approximationsintervall in einem Gebiet um den Punkt $Z_0(\omega_i)$ befinden muß, wobei dieses Gebiet durch einen Kreis mit dem Radius F begrenzt ist.

Eine gleichmäßige Annäherung kann auch erreicht werden unter Verwendung von Quadratsummen entsprechend Gl. (2.3). Hierzu betrachtet man den nicht negativen Fehler $f_i = f(\omega_i)$ und definiert durch Einführung einer Schranke $S > 0$ einen neuen Fehler $\bar{f}_i$:

$$\bar{f}_i = \begin{cases} 0 & \text{für } f_i \leq S, \\ f_i - S & \text{für } f_i > S. \end{cases} \quad (2.6)$$

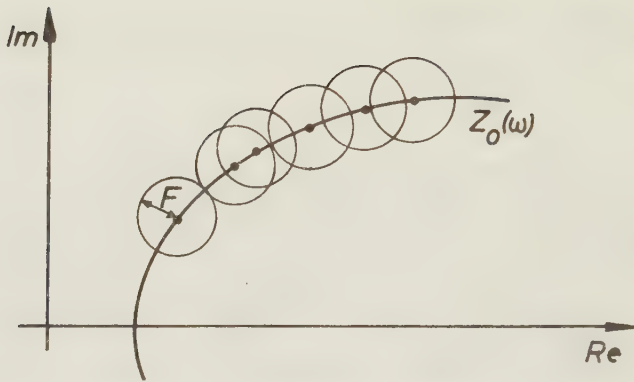


Bild 2.5: Darstellung der gleichmäßigen Annäherung in der komplexen Ebene

Dies bedeutet, daß nur die Fehler bei der Optimierung berücksichtigt werden, die größer sind als die Schranke S , wie es in Bild 2.6 dargestellt ist.

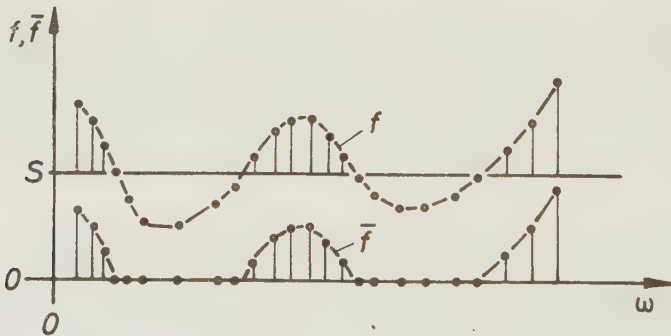


Bild 2.6: Zur Definition des Fehlers $\bar{f}$ nach Gl. (2.6)

Nun kann ein zweistufiger Optimierprozess durchgeführt werden:

Nach Vorgabe einer (ausreichend großen) Schranke S wird

$$F = \sum_{i=1}^{NF} \bar{f}_i^2$$

minimiert. Für das Ergebnis $F = 0$, dies bedeutet, daß $\bar{f}(\omega_i) \leq S$ für alle betrachteten Frequenzen ω_i ist, wird S verkleinert und unter Berücksichtigung des neuen Fehlers eine weitere Quadratsummenminimierung durchgeführt. In dieser Weise wird fortgefahren, bis eine minimale Schranke S gefunden ist.

Auf zwei Probleme bei dieser Vorgehensweise sei hingewiesen:

- 1) Statt der Fehlerfunktion $f(\omega)$ werden nur die Funktionswerte $f_i = f(\omega_i)$ bei einer endlichen Anzahl von Frequenzpunkten betrachtet. Dies bedeutet, daß von einer gleichmäßigen Approximation nur bezüglich der betrachteten Stützstellen gesprochen werden kann. In vielen Fällen ist jedoch auch die Vorschrift nur punktwise gegeben. Andernfalls ist es möglich, durch Veränderung der Stützstellenauswahl die Stellen mit maximalem Fehler zu berücksichtigen.
- 2) Es ist eine Strategie zur Verkleinerung der Schranke S anzugeben.

Für beide Probleme sind Lösungsmöglichkeiten in [8] dargestellt. Bewährt hat sich auch eine Vorgehensweise, bei der ein interaktives Programm verwendet wird. Hierbei ist es möglich, nach jedem Optimierzyklus die Verteilung der Stützstellen neu festzulegen, weiterhin kann die zu verwendende Schranke S eingegeben werden. Schließlich erweist sich die Verwendung einer Version des Programms nach [25] als vorteilhaft, bei der zur Bestimmung des Verbesserungsschrittes, d.h. die Bestimmung der Änderung des Parametervektors $\underline{x}$,

nur die Werte $\bar{f}_i$ des Fehlers berücksichtigt werden, für die gilt $\bar{f}_i \neq 0$. Dies bedeutet insbesondere eine Verkleinerung der Jacobi-Matrix Gl. (2.4), da alle Zeilen k gestrichen werden, für die gilt $\bar{f}_k = 0$. Zur Folge hat dies, daß eine große Anzahl NF an Frequenzpunkten betrachtet werden kann ($NF > 100$), da bei einem Optimierungsschritt der Schrankenoptimierung hiervon nur ein kleiner Teil verwendet wird unter der Voraussetzung, daß die Schranke S nicht zu klein gewählt ist.

Neben der angegebenen Fehlerfunktion $f(w)$ nach Gl. (2.5) können noch weitere Fehlerfunktionen definiert werden. Der Ansatz

$$f(w) = [\Delta X(w)^2 + \Delta Y(w)^2]^n, \quad n=1,2,\dots$$

führt zu einer stärkeren Gewichtung der großen Fehler. Dieser Ansatz hat sich für $n=1$ oder $n=2$ bei der beschriebenen Schrankenoptimierung bewährt.

Insbesondere für Fälle der Nachbildung von Leitungen wird gelegentlich die Reflexionsfunktion

$$r_f(w) = \frac{\Delta Z(w)}{Z_0(w) + Z(jw)}$$

verwendet, welche für kleine Werte von $|\Delta Z(w)|$ näherungsweise proportional ist dem relativen Fehler

$$r(w) = \Delta Z(w) / Z_0(w).$$

Aus den komplexwertigen Funktionen $r_f(w)$ und $r(w)$ können in der bereits dargestellten Art Fehlerfunktionen $f(w)$ gewonnen werden.

Es ist möglich, für alle erwähnten Fehlerarten noch eine frequenzabhängige, reelle Gewichtsfunktion $g(w)$ einzuführen. Die Fehlerfunktion $f(w)$ geht dann über in die Funktion $g(w) \cdot f(w)$.

In Fällen, in denen eine besonders gute Übereinstimmung von Vorschrift und Approximation für eine Frequenz ω_0 und deren Umgebung verlangt wird, kann gefordert werden, daß die Fehlerfunktion $f(\omega)$ sowie möglichst viele ihrer Ableitungen nach der Frequenz für $\omega = \omega_0$ verschwinden, dies ist der Fall der maximalen Ebnung.

Sollen Vorschrift und Approximation für eine endliche Anzahl von Frequenzpunkten übereinstimmen, so handelt es sich um ein Interpolationsproblem, welches an späterer Stelle behandelt wird.

W. GÖPFERT[12] schlägt vor, für jede betrachtete Frequenz ω_i aus dem Approximationsintervall eine Vektorprojektion zur Bestimmung des bei der Optimierung zu behandelnden Fehlers $f(\omega_i)$ vorzunehmen:

$$f(\omega_i) = |Z(j\omega_i)| \cdot |\cos\varphi|^k \cdot \operatorname{sgn}(\cos\varphi) - |Z_0(\omega)| \quad (2.7)$$

Der Winkel φ stellt dabei die Differenz der Argumente von $Z_0(\omega)$ und $Z(j\omega)$ dar (vgl. Bild 2.7). Der nicht negative Parameter k gewichtet den Einfluß der Winkelabweichung.

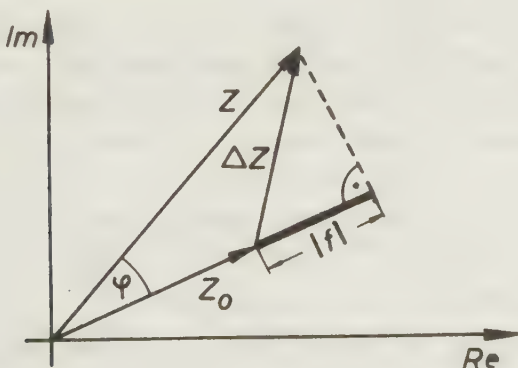


Bild 2.7: Definition des Fehlers f nach Gl. (2.7) für $k = 1$

Das vorgeschlagene Verfahren wurde getestet für $k = 1$, dies bedeutet eine Projektion der approximierenden Funktion $Z(j\omega)$ für jede betrachtete Frequenz ω_1 auf die Vorschrift $Z_0(\omega_1)$, wie es in Bild 2.7 dargestellt ist. Als Vorschrift wurde $Z_0(\omega) = \omega = X_0(\omega)$ verwendet. Das Ergebnis war unbefriedigend, da nur die Realteilabweichung $f(\omega) = |X(\omega) - X_0(\omega)|$ bezüglich der approximierenden Funktion $Z(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$ als Fehler angesehen wurde, nicht jedoch die Imaginärteilabweichung $|Y(\omega)|$; der Imaginärteil $Y(\omega)$ der approximierenden Funktion nahm dabei im betrachteten Frequenzintervall große Werte an, verglichen mit dem Realteil $X(\omega)$ oder der Realteilabweichung.

Dieses Ergebnis zeigt, daß es nicht sinnvoll ist, den Parameter k während des gesamten Optimierprozesses konstant zu lassen, vielmehr wäre eine Strategie anzugeben, nach welcher der Parameter k zu variieren ist. Diesbezüglich durchgeführte Versuche konnten nicht erfolgreich abgeschlossen werden, da ein variabler Parameter k die Konvergenz des Optimierprozesses gefährdete.

Zur Bestimmung der Jacobi-Matrix Gl. (2.4) ist es notwendig, für jede betrachtete Frequenz ω_1 die partiellen Ableitungen des Fehlers f_1 nach allen Parametern x_k , $k = 1, 2, \dots, NX$ zu bilden. Diese Aufgabe kann in zwei Schritten durchgeführt werden:

Schritt 1: Bestimmung der Impedanz $Z(j\omega_1) = X(\omega_1) + jY(\omega_1)$ sowie der partiellen Ableitungen $\frac{\partial X(\omega_1)}{\partial b_k}, \frac{\partial Y(\omega_1)}{\partial b_k}$ nach allen Bauelementen b_k , $k = 1, 2, \dots, NX$.

Schritt 2: Bestimmung des Fehlers $f(\omega_1) = f_1$ und der partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_1}{\partial x_k}$ unter Verwendung der bei Schritt 1 be-

rechneten Ableitungen und unter Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen den Bauelementewerten und den Parametern x_k .

Diese Vorgehensweise bietet den Vorteil, daß allgemeine Analyseprogramme für Schritt 1 verwendet werden können, während die spezielle Definition des Fehlers f nur bei Schritt 2 zu berücksichtigen ist.

Für den Ansatz der Fehlerfunktion nach Gl. (2.5) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k} &= \frac{\partial (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}}{\partial x_k} \\ &= (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{-1/2} \cdot (\Delta x \frac{\partial x}{\partial b_k} + \Delta y \frac{\partial y}{\partial b_k}) \cdot \frac{\partial b_k}{\partial x_k} . \end{aligned}$$

Dabei bedeuten $Z_o(\omega) = X_o(\omega) + j Y_o(\omega)$ Vorschrift,

$Z(j\omega) = X(\omega) + j Y(\omega)$ Approximation,

$\Delta Z(\omega) = [X(\omega) - X_o(\omega)] + j [Y(\omega) - Y_o(\omega)] = \Delta X(\omega) + j \Delta Y(\omega)$

Impedanzfehler,

b_k Bauelementewert,

x_k Parameter.

Vorausgesetzt wird hier, daß der Bauelementewert b_k nur vom Parameter x_k abhängt. Für $\Delta Z = 0$ ist $\partial f / \partial x_k = 0$ zu setzen.

Bei Verwendung der Schrankenoptimierung (vgl. Gl. (2.6)) gilt

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \quad \text{für } f_i > S.$$

Für $f_i \leq S$ werden die partiellen Ableitungen nicht benötigt.

In [19], [11] und [24] werden Methoden diskutiert, mit denen die partiellen Ableitungen einer Übertragungsfunktion nach den Bauelementen berechnet werden können. Ein Verfahren, das insbesondere für Schaltungsstrukturen, wie sie in Abschnitt 2.4 behandelt werden, vorteilhaft angewendet werden kann, sei hier angegeben.

Betrachtet wird eine RLC-Schaltung entsprechend Bild 2.8, welche die Impedanz B_i enthält. Die Eingangsimpedanz dieser Schaltung ist $Z = U_1/I_1$. Für eine feste Frequenz soll die Ableitung $\partial Z/\partial B_i$ berechnet werden.

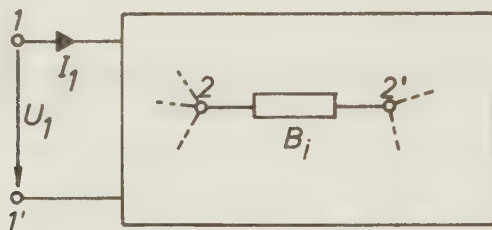


Bild 2.8: Zweipol, der die Impedanz B_i enthält

Sieht man die Knoten 2, 2', zwischen denen sich die Impedanz B_i befindet, als Tor an, welches mit B_i abgeschlossen ist, so gelangt man zu einem Zweitor, wie es in Bild 2.9 dargestellt ist. Unter der Voraussetzung, daß das Zweitor mit den Toren 1, 1' und 2, 2' durch eine Impedanz-Matrix beschrieben werden kann, gilt

$$U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2,$$

$$U_2 = Z_{12} I_1 + Z_{22} I_2,$$

$$U_2 = -B_i I_2.$$

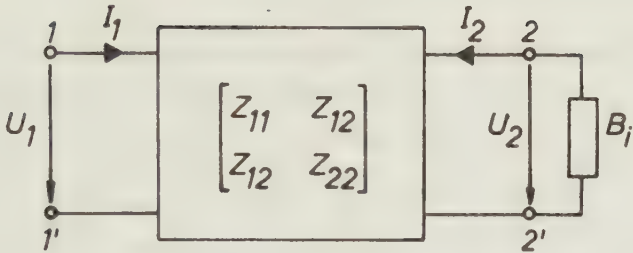


Bild 2.9: Zweitor, abgeschlossen mit der Impedanz B_i

Unter Verwendung von

$$I_2 = \frac{-Z_{12}}{B_i + Z_{22}} I_1$$

erhält man

$$Z = \frac{U_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{B_i + Z_{22}}$$

und

$$\frac{\partial Z}{\partial B_i} = \frac{Z_{12}^2}{(B_i + Z_{22})^2} = \left[\frac{I_2}{I_1} \right]^2.$$

2.3 Berücksichtigung von Nebenbedingungen

Bei der Ortskurvenapproximation durch Schaltungsoptimierung können Forderungen bezüglich der Schaltungsstruktur und der zu verwendenden Bauelemente (z.B. Übertragerfreiheit, Anzahl der Energiespeicher, RC-Netzwerke) direkt beim Ansatz der zu optimierenden Schaltung berücksichtigt werden, ebenso wie ein vorgeschriebenes Verhalten für $\omega \rightarrow 0$ oder $\omega \rightarrow \infty$. Zwei weitere Nebenbedingungen, nämlich Einschränkung des Wertebereiches für die Bauelementewerte sowie Berücksichtigung von Verlusten bei den Energiespeichern erfordern eine gesonderte Behandlung. Diese Nebenbedingungen können begründet sein in der Technologie, in der die gefundene Schaltung schließlich aufzubauen ist.

Die Bedingung, daß die Bauelementewerte b_i nicht negativ werden dürfen, wird durch den Ansatz $b_i = x_i^2$ berücksichtigt.

Sind für einen Teil der Bauelemente feste Werte vorgeschrieben, zu denken ist daran, daß alle Induktivitäten oder Kapazitäten nur feste, vorgegebene Werte annehmen dürfen, so müssen diese Bauelemente, falls sie in die betrachtete Schaltung eingefügt werden, bei der Bestimmung der Impedanz berücksichtigt werden, stellen für die Optimierung jedoch keinen Freiheitsgrad dar.

Ist die Größe b_i eines Bauelementewertes durch eine untere Schranke S_u beschränkt, so kann der Ansatz $b_i = S_u + x_i^2$ gewählt werden.

Für eine zweiseitige Schranke, d.h. es muß gelten $S_u \leq b_i \leq S_o$, ist eine Variablentransformation $b_i = t(x_i)$ vorzunehmen. Dabei muß $t(x)$ eine stetige, differenzierbare und für alle x erklärte Funktion sein mit $S_u \leq t(x) \leq S_o$, wobei jeder Wert zwischen S_u

und S_o mindestens einmal angenommen wird, wie dies bei der Funktion

$$t(x) = [S_o + S_u + (S_o - S_u) \cos x] / 2$$

der Fall ist. Als günstiger erweisen sich jedoch monoton steigende Funktionen entsprechend Bild 2.10 wie

$$t(x) = \frac{1}{2}(S_o + S_u) + \frac{1}{\pi}(S_o - S_u) \arctan x ,$$

wobei für $\arctan x$ der Hauptwert zu verwenden ist.

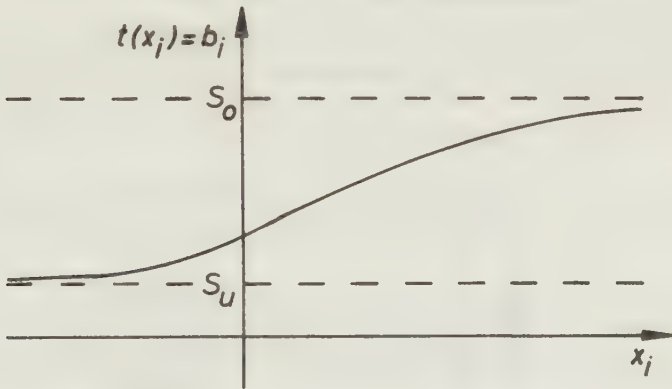


Bild 2.10: Variablentransformation $b_i = t(x_i)$

Die partielle Ableitung der Eingangsimpedanz Z nach dem Parameter x_i ergibt sich auch hier zu

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} = \frac{\partial Z}{\partial b_i} \frac{\partial b_i}{\partial x_i}$$

mit $b_i = t(x_i)$.

Die Aufgabe, Verluste bei den Energiespeichern zu berücksichtigen, kann dadurch gelöst werden, daß statt Induktivitäten bzw. Kapazitäten Zweipole verwendet werden, wie sie in Bild 2.11 dargestellt sind.

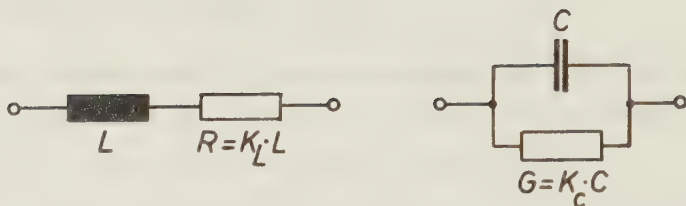


Bild 2.11: Verlustbehaftete Energiespeicher

Die Kopplung $R_i = K_L L_i$ oder, unter Verwendung des Parameters x_i ,

$$L_i = x_i^2, \quad R_i = K_L x_i^2 \quad (2.8)$$

bedeutet, daß die Güten aller Spulen für eine Frequenz konstant sind, falls K_L für alle Spulen verwendet wird.

Will man nicht eine feste Güte, sondern eine maximale Güte vorschreiben, so kann für den induktiven Zweipol nach Bild 2.11 der Ansatz

$$L_i = x_i^2, \quad R_i = K_L (1 + x_{i+1}^2) x_i^2$$

gewählt werden oder man schaltet zu dem induktiven Zweipol nach Bild 2.11 einen weiteren Ohmwiderrstand $R_{i+1} = x_{i+1}^2$ in Reihe, wobei für R_i und L_i dann die Beziehungen nach Gl. (2.8) zu verwenden sind.

Entsprechende Ansätze können für den kapazitiven Zweipol nach Bild 2.11 gefunden werden.

2.4 Spezielle Schaltungsstrukturen

Jede Zweipolfunktion $Z(p)$ kann mit der Minimalzahl an Energiespeichern nach dem BRUNE-Verfahren [2] realisiert werden. Die Minimalzahl der Energiespeicher ist bestimmt durch den Grad der Zweipolfunktion. Realisierungen nach dem BRUNE-Verfahren zeichnen sich durch eine Kettenstruktur aus, wobei neben Zweipolen in den Längs- und Querzweigen, wie sie in Bild 2.12 dargestellt sind, nur noch Teilnetzwerke mit festgekoppelten Übertragern nach Bild 2.13, hier BRUNE-Element genannt, auftreten.

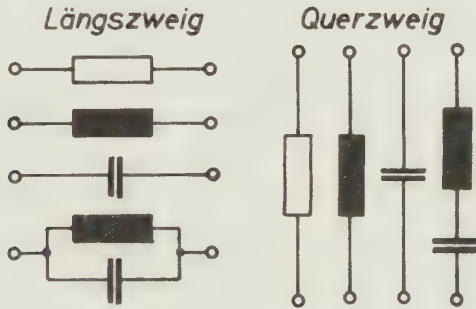


Bild 2.12: Zweipole in den Längs- und Querzweigen

Bei der zyklischen Realisierung einer Zweipolfunktion nach BRUNE wird unter Verwendung der in Bild 2.12 dargestellten Zweipole solange Reaktanz- und Widerstandsreduktion durchgeführt, bis die restliche zu realisierende Zweipolfunktion an einer Stelle $p = j\omega_0$ einen verschwindenden Realteil, jedoch keinen verschwindenden Imaginärteil besitzt. Dann muß die Realisierung mit einem BRUNE-Element fortgesetzt werden und ein neuer Zyklus beginnen, falls die Restzweipolfunktion nicht konstant ist.

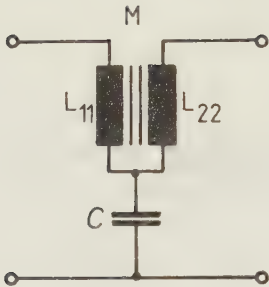


Bild 2.13: BRUNE-Element

Mit Hilfe des BRUNE-Verfahrens und seiner Erweiterung[20] , auf die hier nicht eingegangen werden soll, läßt sich für jede Zweipolfunktion eine Klasse äquivalenter kanonischer Realisierungen bestimmen. Es soll nun untersucht werden, wie sich Schaltungen aus dieser Klasse zur Approximation von Ortskurvenvorschriften durch direkte Schaltungsoptimierung eignen.

Liegt eine reine Kettenstruktur vor, wie sie in Bild 2.14 dargestellt ist, so können alle Ströme und Spannungen in einfacher Weise bestimmt werden.

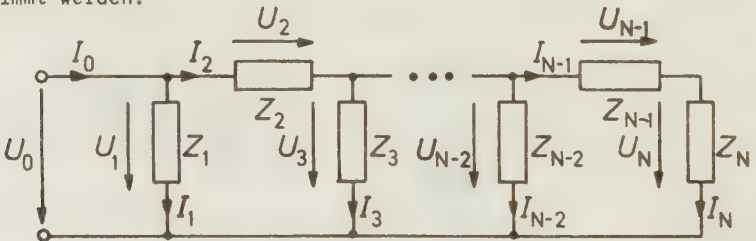


Bild 2.14: Kettenstruktur

Ausgehend von dem Ansatz $U_N = 1$ sind die Ströme und Spannungen in den Quer- und Längszweigen schrittweise zu berechnen:

$$U_N = 1 ,$$

$$I_N = U_N / Z_N ,$$

$$I_{N-1} = I_N ,$$

$$U_{N-1} = I_{N-1} Z_{N-1} ,$$

$$U_{N-2} = U_{N-1} + U_N ,$$

$$I_{N-2} = U_{N-2}/Z_{N-2} ,$$

$$I_{N-3} = I_{N-2} + I_{N-1} ,$$

$$\vdots$$

$$U_1 = U_2 + U_3 ,$$

$$I_1 = U_1/Z_1 ,$$

$$I_0 = I_1 + I_2 ,$$

$$U_0 = U_1 .$$

Dieser Algorithmus läßt sich gut in ein Programm umsetzen, wobei auch gegenüber Bild 2.14 veränderte Strukturen (Beginn mit einem Längszweig, mehrere Querkweige hintereinander oder ähnliches) in einfacher Weise berücksichtigt werden können. Durch die Einführung von Admittanzen statt Impedanzen in den Querkweigen vereinfacht sich das Analyseprogramm.

Neben der Eingangsimpedanz $Z = U_0/I_0$ lassen sich auch die partiellen Ableitungen der Eingangsimpedanz nach den Zweipolen in den Längs- und Querkweigen angeben:

$$\frac{\partial Z}{\partial Z_i} = \frac{I_i^2}{I_0^2} .$$

Ist ein Zweipol Z_i von mehreren Optimierparametern abhängig, d.h.

$$Z_i = f(\omega, x_r, x_{r+1}, \dots, x_s),$$

so ist für jeden Optimierparameter nachzudifferenzieren:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_r} = \frac{\partial Z}{\partial Z_i} \cdot \frac{\partial Z_i}{\partial x_r} .$$

Eine gesonderte Behandlung bei der Analyse erfordert das BRUNE-Element nach Bild 2.13 . Hierzu kann ein Ersatznetzwerk für festgekoppelt Übertrager, bei dem allerdings nicht realisierbare Elemente auftreten, verwendet werden, so daß man zu einem Ersatznetzwerk entsprechend Bild 2.15 für das BRUNE-Element gelangt. Mit diesem Ersatznetzwerk kann die Analyse in der beschriebenen Art durchgeführt werden.

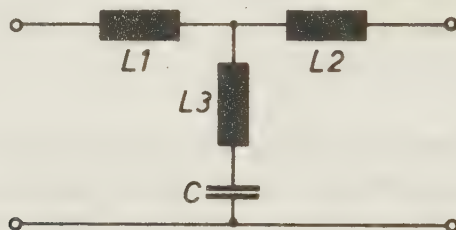


Bild 2.15: Ersatznetzwerk für das BRUNE-Element

Wegen der Bedingung $L_1 L_2 + L_2 L_3 + L_1 L_3 = 0$, welche das Ersatznetzwerk eines festgekoppelten Übertragers kennzeichnet, sind für die Beschreibung des BRUNE-Elementes bzw. des Ersatznetzwerkes nur drei Parameter nötig. Bei dem Ansatz

$$L_{11} = x_r^2 ,$$

$$L_{22} = x_{r+1}^2 ,$$

$$M = x_r x_{r+1} ,$$

$$C = x_{r+2}^2 ,$$

dies bedeutet für das Ersatznetzwerk nach Bild 2.15

$$L_1 = x_r^2 - x_r x_{r+1} ,$$

$$L_2 = x_{r+1}^2 - x_r x_{r+1} ,$$

$$L_3 = x_r x_{r+1} ,$$

sind die Optimierparameter x_r , x_{r+1} , x_{r+2} keinen Einschränkungen unterworfen.

Bei einem realisierten Programm wurden zusätzlich zu den in Bild 2.12 angegebenen Zweipolen sowie dem BRUNE-Element noch weitere Teilnetzwerke zugelassen, um Verluste bei den reaktiven Elementen berücksichtigen zu können.

Bei vorgegebenem Grad N der approximierenden Funktion, dies bedeutet für die hier aufgeführten kanonischen Schaltungen, daß die Anzahl der reaktiven Elemente festliegt, existiert zwar nur eine endliche Anzahl von Strukturen, es ist dennoch nicht sinnvoll, für $N \geq 3$ alle möglichen Strukturen auf ihre Eignung zur Approximation zu untersuchen. Liegen neben der anzunähernden Vorschrift $Z_o(\omega) = X_o(\omega) + jY_o(\omega)$ noch weitere Informationen über den Aufbau des nachzubildenden Systems vor, so können diese Informationen zum Auffinden einer geeigneten Struktur der hier beschriebenen Art verhelfen. Insbesondere gelingt dies dann, wenn das nachzubildende System ebenfalls Kettenstruktur besitzt.

Soll die Eingangsimpedanz $Z_o(j\omega)$ einer vorgegebenen Schaltung in einem Frequenzbereich durch eine Schaltung niederen Grades nachgebildet werden, so besteht die Möglichkeit, zunächst äquivalente Schaltungen durch Realisierung von $Z_o(p)$ mit dem BRUNE-Verfahren zu bestimmen und diese Schaltungsstrukturen daraufhin zu untersuchen, ob sie zur Approximation geeignet sind, falls nicht alle Glieder der Kette verwendet werden, vielmehr die letzten Glieder der Kette durch einen Ohmwiderstand ersetzt werden, wie es in Bild 2.16 dargestellt ist.

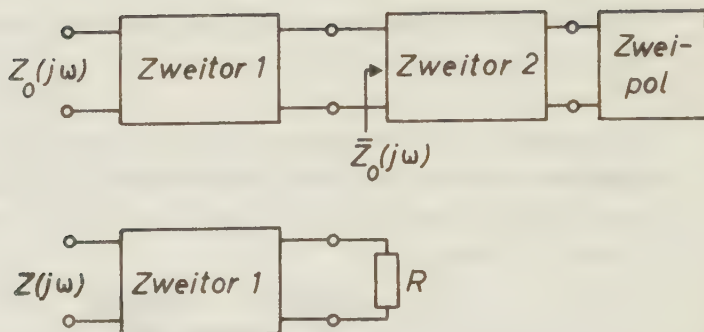


Bild 2.16: Nachbildung der Eingangsimpedanz $Z_0(j\omega)$ einer Schaltung mit Kettenstruktur durch eine mit dem Ohmwiderstand R abgeschlossene Schaltung

Unter Verwendung der in Bild 2.16 angegebenen Bezeichnungen bedeutet dies, daß die Impedanz $\bar{Z}_0(j\omega)$ durch den Ohmwiderstand R ersetzt wird. Erfolgversprechend ist dieses Verfahren, falls $\bar{Z}_0(j\omega)$ entsprechend Bild 2.17 im betrachteten Frequenzbereich näherungsweise konstant ist. Aus der Klasse der äquivalenten Netzwerke, die bei der Realisierung von $Z_0(p)$ durch das BRUNE-Verfahren entstehen, können unter Berücksichtigung dieser Tatsache günstige Netzwerkstrukturen einschließlich der Werte für die Bauelemente des Zweitors 1 sowie für den Abschlußwiderstand gefunden werden. Bei dem nachbildenden Netzwerk sind dann die Bauelemente des Zweitors 1 sowie der Abschlußwiderstand einer Optimierung zu unterziehen.

Liegt ein optimiertes Netzwerk mit der Eingangsimpedanz $Z(j\omega)$ vor, welches aus einem mit einem Ohmwiderstand abgeschlossenen Zweitor mit Kettenstruktur besteht, und erfüllt $Z(j\omega)$ die gestellten Forderungen bezüglich der Güte der Annäherung nicht, so kann diese Schaltung erweitert werden durch Ersetzen des Abschlußwiderstandes R

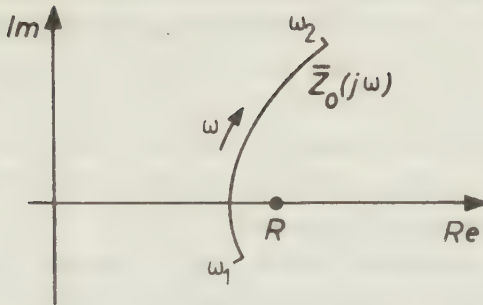


Bild 2.17: Approximation eines Ortskurvenstückes $\bar{Z}_0(j\omega)$ durch einen Ohmwidstand R

durch einen Zweipol mit der Impedanz $Z'(j\omega)$. Kann das erhaltene Zweitor durch eine Impedanzmatrix beschrieben werden, so gilt

$$Z = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{R + Z_{22}}.$$

Ersetzt man R durch $Z'(j\omega)$ und verlangt, daß $Z(j\omega)$ mit der Vorschrift $Z_0(j\omega)$ übereinstimmt, so müßte $Z'(j\omega) = \bar{Z}(j\omega)$ gelten mit

$$\bar{Z} = \frac{Z_{12}^2}{Z_0 - Z_{11}} - Z_{22}.$$

Der Verlauf der Ortskurve $\bar{Z}(j\omega)$ im betrachteten Frequenzbereich läßt Rückschlüsse auf die Wahl des Zweipols $Z'(j\omega)$ zu. Um die Güte der Approximation von $Z_0(j\omega)$ durch $Z(j\omega)$ zu vergrößern, muß die Ortskurve $\bar{Z}(j\omega)$ durch die Ortskurve $Z'(j\omega)$ eines Zweipols im betrachteten Frequenzbereich angenähert werden. Neben einfachen Strukturen mit einem oder zwei Energiespeichern, wie sie in Bild 2.12 dargestellt sind, kann auch das BRUNE-Element nach Bild 2.13, wel-

ches mit einem Ohmwiderstand abgeschlossen ist, verwendet werden. Bekanntlich tangiert die Ortskurve der Eingangsimpedanz $Z_B(j\omega)$ eines mit einem Zweipol (hier Ohmwiderstand) abgeschlossenen BRUNE-Elements die imaginäre Achse der komplexen Ebene. Die drei Parameter, die das BRUNE-Element beschreiben, lassen sich direkt aus dem Verlauf der Ortskurve in der Nähe dieses Ortskurvenpunktes bestimmen (vgl. Bild 2.18), genauer

- aus der Frequenz ω_0 , für die gilt $\operatorname{Re}\{Z_B(j\omega)\} = 0$,
- aus dem Imaginärteil $Y = Z_B(j\omega_0)/j$ bei dieser Frequenz,
- aus der Frequenzabhängigkeit des Ortskurvenverlaufes in der Umgebung von $Z_B(j\omega_0)$, nämlich

$$\left. \frac{d\operatorname{Im}\{Z_B(j\omega)\}}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}$$

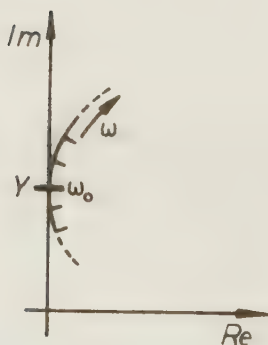


Bild 2.18: Teil der Ortskurve eines mit einem Zweipol abgeschlossenen BRUNE-Elements, der zur Bestimmung des BRUNE-Elements verwendet werden kann ($Y < 0$ oder $Y > 0$ sind möglich)

2.5 Allgemeine Gesichtspunkte bei der Ortskurvenapproximation durch Schaltungsoptimierung

Der wesentliche Vorteil beim Schaltungsentwurf mit Optimierverfahren zur Approximation von Ortskurven besteht darin, daß Nebenbedingungen, welche durch die Technologie gegeben sind, in der die Schaltung aufgebaut werden soll, berücksichtigt werden können. Zu nennen sind hier die Art der Bauelemente und Grenzen für die Bauelementewerte. Neben den einfachen Ansätzen zur Berücksichtigung von Verlusten bei Kondensatoren und Spulen, wie sie in Bild 2.11 dargestellt sind, können noch weitere parasitäre Effekte bei den technischen Bauelementen berücksichtigt werden. So kann ein technischer ohmscher Widerstand beschrieben werden durch ein Ersatzschaltbild entsprechend Bild 2.19. Besitzen

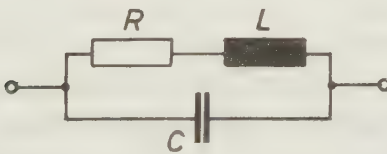


Bild 2.19: Ersatzschaltbild für einen technischen Ohmwiderstand

alle ohmschen Widerstände in der aufzubauenden Schaltung gleiche Bauform, so bedeutet dies, daß für das Ersatznetzwerk nach Bild 2.19 L und C als konstant zu

betrachten sind, während der Wert für R der Optimierung unterzogen wird. Auch für Spulen ist ein Ersatznetzwerk entsprechend Bild 2.19 möglich. Hier wird man jedoch berücksichtigen, daß R und C von der Größe des Induktivitätswertes L abhängig sind.

Es ist möglich, eine Schaltungsoptimierung statt mit idealen Elementen Ohmwiderstand R , Induktivität L und Kapazität C mit ohmschen Zweipolen, induktiven Zweipolen und kapazitiven Zweipolen durchzuführen, wobei diesen Zweipolen eine Ersatzschaltung für das tech-

nische Bauelement zugrunde liegt. Auf diese Weise können Forderungen wie

"es sind nur Spulen mit $L \leq 1 \text{ mH}$ zu verwenden, wobei die Spulengüte bei 10 kHz den Wert $Q = 20$ nicht überschreiten darf"

berücksichtigt werden.

Programme zur Schaltungsoptimierung sollten interaktiv aufgebaut sein, um die Schritte

- Angabe Struktur und Bauelementewerte,
- Optimierung,
- Darstellung des Ergebnisses (Schaltung und Fehler),
- Überprüfung der Schaltung und Änderung

in mehreren Zyklen durchführen zu können.

Wenn auch durch den rechnergestützten Schaltungsentwurf viele Aufgaben gelöst werden können, so ist doch festzustellen, daß die Güte der Lösungen abhängig ist vom Geschick und der Erfahrung des Anwenders. Dies gilt insbesondere für das Auffinden geeigneter Schaltungsstrukturen und Anfangswerte für die Bauelemente. Hier können andere Verfahren Abhilfe schaffen, die im folgenden angegeben sind.

3 APPROXIMATION DURCH NICHT RATIONALE FUNKTIONEN

Kann eine rationale, reelle Funktion $Z(p)$ als Eingangsimpedanz einer Schaltung realisiert werden, die als Bauelemente nur ohmsche Widerstände, Induktivitäten, Kapazitäten und Übertrager enthält, so ist $Z(p)$ eine Zweipolfunktion, d.h. es gilt $\operatorname{Re} Z(j\omega) \geq 0$ für alle Frequenzen ω , für die $Z(j\omega)$ endlich ist. Diese Realteilbedingung wird während einer Schaltungsoptimierung, wie sie in Kapitel 2 beschrieben ist, dadurch erfüllt, daß alle Bauelementewerte nur nicht-negative Werte annehmen dürfen.

Bei dem im folgenden beschriebenen Verfahren wird eine Zweipolfunktion $Z(p)$ durch einen zweistufigen Optimierprozess bestimmt, wobei in der ersten Stufe Realteil und Imaginärteil der approximierenden Funktion durch nichtrationale Funktionen beschrieben werden und in einer zweiten Stufe eine rationale Approximation durchgeführt wird. Dabei ist bereits bei Stufe 1 auf die Realteilbedingung zu achten. Dies bedeutet, daß nicht nur Frequenzen aus dem vorgegebenen Approximationsintervall $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ zu betrachten sind, vielmehr ist die Einhaltung der Realteilbedingung für alle Frequenzen $0 \leq \omega \leq \infty$ sicherzustellen. Als günstig erweist sich dabei eine Transformation, die das unendlich große Frequenzintervall auf ein endliches Intervall abbildet:

$$z = \frac{\sigma_0 - p}{\sigma_0 + p}, \quad p = \sigma_0 \frac{1 - z}{1 + z}, \quad \sigma_0 > 0. \quad (3.1)$$

Für $p = j\omega$ gilt

$$z = \frac{\sigma_0 - j\omega}{\sigma_0 + j\omega} = e^{j 2 \arctan(-\omega/\sigma_0)} = e^{j\varphi} \quad (3.1a)$$

mit $\tan(\varphi/2) = -\omega/\sigma_0$;

für $p = \sigma + j\omega$ gilt

$$z = \frac{\sigma_0 - \sigma - j\omega}{\sigma_0 + \sigma + j\omega}, \quad (3.1b)$$

d.h. für $\sigma > 0$ gilt $|z| < 1$. Dies bedeutet, daß die imaginäre Achse der p -Ebene auf den Einheitskreis, die offene rechte p -Halbebene auf das Innere des Einheitskreises abgebildet wird, wie es in Bild 3.1 dargestellt ist; die Punkte $p = \sigma_0$, $p = 0$ und $p = \infty$ werden auf die Punkte $z = 0$, $z = 1$ und $z = -1$ abgebildet.

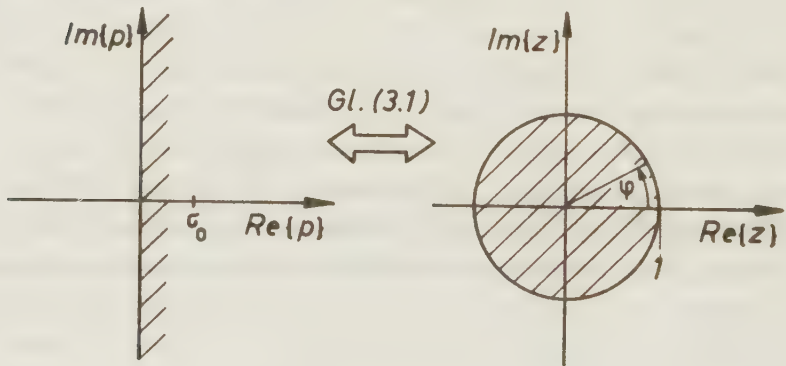


Bild 3.1: p - z -Transformation

In diesem Kapitel werden nur Zweipolfunktionen $Z(p)$ behandelt, die keine Pole auf der imaginären Achse einschließlich $p = \infty$ und $p = 0$ besitzen. Diese Einschränkung ist für praktische Probleme belanglos, denn mit technischen Bauelementen können Induktivitäten und Kapazitäten nur näherungsweise realisiert werden; Spulen und Kon-

densatoren weisen Verluste auf, die zur Folge haben, daß die realisierte Zweipolfunktion keine Pole auf der imaginären Achse besitzen kann. Für Sonderfälle, in denen die genannte Einschränkung nicht zulässig ist, kann die betrachtete Zweipolfunktion aufgeteilt werden in eine Reaktanzzweipolfunktion $Z_{LC}(p)$ und in eine Zweipolfunktion, für die die genannte Einschränkung gültig ist. In gleicher Weise ist vorzugehen, falls die Vorschrift selbst einen Pol beinhaltet. Ein weiterer Gesichtspunkt ist zu bedenken. Würde sich ein Pol $p_{\infty} = j\omega_{\infty}$ bei der Approximation ergeben, wobei ω_{∞} außerhalb des Approximationsintervalls $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ liegt, wie es in Bild 3.2 dargestellt ist, so hat ein Pol $p'_{\infty} = \sigma_{\infty} + j\omega_{\infty}$ für $|\sigma_{\infty}| \ll \omega_{\infty}$ näherungsweise den gleichen Einfluß auf das Verhalten der Zweipolfunktion im Approximationsintervall.

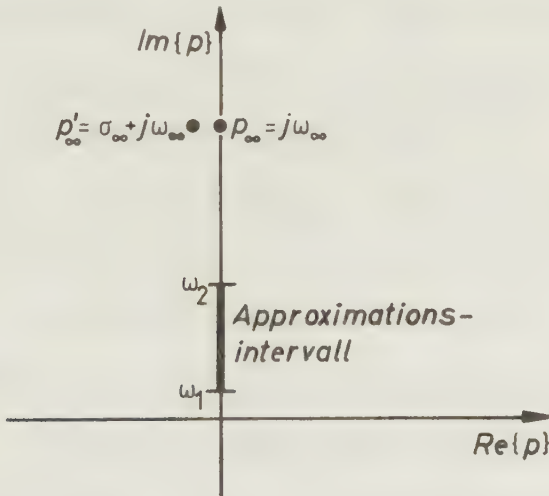


Bild 3.2: Lage der Pole p_{∞} und p'_{∞}

Jede auf der imaginären Achse polfreie Zweipolfunktion $Z(p)$ wird durch die Transformation nach Gl. (3.1) übergeführt in eine ebenfalls rationale, reelle Funktion $\bar{Z}(z)$, die folgende Eigenschaften besitzt:

- 1) $\bar{Z}(z)$ ist im abgeschlossenen Einheitskreis $|z| \leq 1$ analytisch;
- 2) es gilt $\operatorname{Re}\{\bar{Z}(e^{j\varphi})\} \geq 0$ für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Unter Verwendung der Abkürzungen

$$\begin{aligned}\bar{Z}(e^{j\varphi}) &= \operatorname{Re}\{\bar{Z}(e^{j\varphi})\} + j \operatorname{Im}\{\bar{Z}(e^{j\varphi})\} \\ &= \bar{U}(e^{j\varphi}) + j \bar{V}(e^{j\varphi}) = U(\varphi) + j V(\varphi)\end{aligned}$$

muß also gelten $U(\varphi) \geq 0$ für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Bezüglich der Eigenschaft 1 läßt sich folgender Satz formulieren [22]:

Satz 3 Erfüllen die für $z = e^{j\varphi}$ in $[0, 2\pi]$ stetigen und stückweise differenzierbaren Funktionen $\bar{U}(z)$ und $\bar{V}(z)$ die Gleichungen

$$\bar{V}(e^{j\varphi}) - \bar{V}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{U}(e^{j\vartheta}) \cot \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\vartheta \quad (3.2)$$

und

$$\bar{U}(e^{j\varphi}) - \bar{U}(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{V}(e^{j\vartheta}) \cot \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\vartheta, \quad (3.3)$$

so bilden sie Real- und Imaginärteil einer in $|z| \leq 1$ stetigen, in $|z| < 1$ analytischen Funktion $\bar{Z}(z)$.

Dieser Satz wird in [22] bewiesen. Funktionen $\bar{U}(z)$ und $\bar{V}(z)$, die die Gleichungen (3.2) und (3.3) erfüllen, werden konjugierte Funktionen genannt. Die Gleichungen (3.2) und (3.3) entsprechen der Hilbert-Transformation [23], welche für $p = j\omega$ einen Zusammenhang beschreiben zwischen Realteil und Imaginärteil einer nicht notwendigerweise

rationalen Übertragungsfunktion $H(p)$ eines linearen, zeitinvarianten, stabilen und kausalen Systems.

Das Problem der Ortskurvenapproximation durch Zweipolfunktionen kann nun formuliert werden. Gesucht sind Funktionen $\bar{U}(z)$ und $\bar{V}(z)$ mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $\bar{U}(e^{j\varphi})$ und $\bar{V}(e^{j\varphi})$ sind stetig und stückweise differenzierbar;
- 2) es gilt $\bar{U}(e^{j\varphi}) \geq 0$ für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$;
- 3) $\bar{U}(e^{j\varphi}) = U(\varphi)$ und $\bar{V}(e^{j\varphi}) = V(\varphi)$ approximieren in einem Bereich $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ eine gegebene Vorschrift $U_0(\varphi)$ und $V_0(\varphi)$. Ist die Vorschrift $Z_0(\omega) = X_0(\omega) + jY_0(\omega)$ in einem Frequenzintervall $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ gegeben, so können Realteil $X_0(\omega)$, Imaginärteil $Y_0(\omega)$ und das Frequenzintervall mittels der Beziehung $\varphi = 2 \arctan(-\omega/\omega_0)$ auf $U_0(\varphi)$, $V_0(\varphi)$, φ_1 , φ_2 umgerechnet werden.
- 4) Sind $\bar{U}(z)$ und $\bar{V}(z)$ keine rationalen Funktionen, so ist in einer zweiten Optimierstufe eine rationale Approximation durchzuführen.

R. UNBEHAUEN schlägt vor [22], für $U(\varphi)$ einen Polygonzug anzusetzen. Dies hat den großen Vorteil, daß $U(\varphi)$ sicher dann nicht negativ ist, falls alle verwendeten Stützstellen nicht negative Werte aufweisen. Hier sollen nun andere Funktionen auf ihre Eignung zur nicht rationalen Approximation untersucht werden. Zunächst wird dargestellt, in welcher Weise aus der Kenntnis von $U(\varphi)$ eine konjugierte Funktion $V(\varphi)$ gewonnen werden kann.

Da $\bar{Z}(z) = \bar{U}(z) + j\bar{V}(z)$ eine reelle Funktion ist, gilt $\bar{V}(0) = 0$, somit kann Gl. (3.2) übergeführt werden in

$$\bar{V}(e^{j\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{U}(e^{j\vartheta}) \cot \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\vartheta$$

oder mit $\bar{V}(e^{j\varphi}) = V(\varphi)$, $\bar{U}(e^{j\varphi}) = U(\varphi)$

$$V(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(\vartheta) \cot \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\vartheta. \quad (3.4)$$

Da
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cot \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\vartheta = 0$$

gilt, kann Gl. (3.4) erweitert werden zu

$$V(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [U(\vartheta) - U(\varphi)] \cot \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\vartheta.$$

Eine partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} \int [U(\vartheta) - U(\varphi)] \cot \frac{\varphi - \vartheta}{2} d\vartheta &= -2[U(\vartheta) - U(\varphi)] \ln \left| \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2} \right| + \\ &+ 2 \int \frac{dU(\vartheta)}{d\vartheta} \ln \left| \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2} \right| d\vartheta. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, daß $U(\varphi)$ stetig ist und die Beziehung

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln \sin^2 x) = 0$$

gilt, so gelangt man zu

$$V(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dU(\vartheta)}{d\vartheta} \ln \left| \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2} \right| d\vartheta. \quad (3.5)$$

Unter Verwendung von $U(\varphi) = U(-\varphi)$ kann Gl. (3.5) noch dergestalt umgeformt werden, daß nur über das Intervall $[0, \pi]$ zu integrieren ist:

$$V(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\ln \left| \sin \frac{\varphi-\vartheta}{2} \right| - \ln \left| \sin \frac{\varphi+\vartheta}{2} \right|] \frac{dU(\vartheta)}{d\vartheta} d\vartheta \quad (3.6)$$

Ist $\frac{dU(\vartheta)}{d\vartheta}$ nur stückweise stetig, so sind entsprechende Teilintegrale zu bilden.

Die Gleichung (3.6) stellt bei vorgegebener Funktion $U(\varphi)$ den Ausgangspunkt dar für eine numerische Berechnung der konjugierten Funktion $V(\varphi)$. Das vorliegende Integral wird dabei nicht exakt ausgewertet, vielmehr wird eine Näherung durchgeführt.

Die Funktion $\ln |\sin x|$ besitzt einen Verlauf, wie er in Bild 3.3 dargestellt ist. Dabei gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \ln |\sin x| &= \ln |\sin(-x)| = \ln |\sin(\pi-x)| \\ &= \ln |\sin(\pi+x)| = \ln |\sin(-\pi-x)| \end{aligned} \quad (3.7)$$

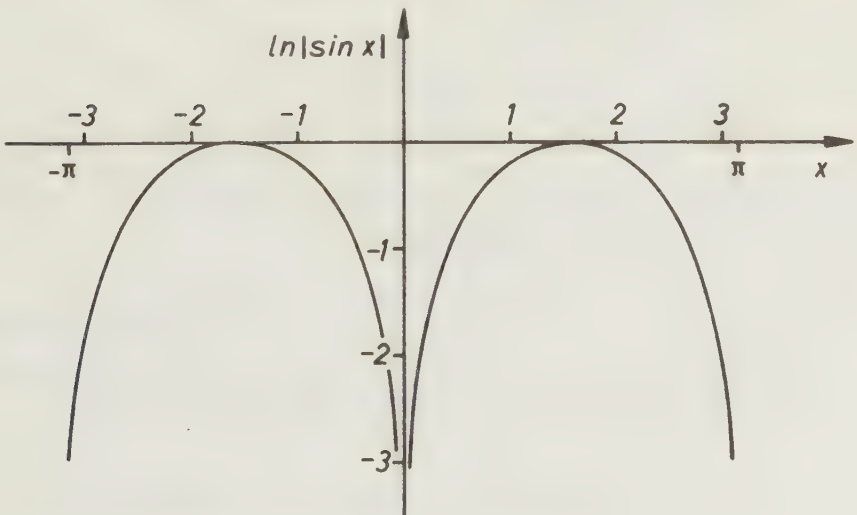


Bild 3.3: Darstellung von $\ln |\sin x|$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\sin x \approx x \quad \text{für } x \approx 0,$$

$$\sin x \approx \pi - x \quad \text{für } x \approx \pi$$

kann als Näherung

$$\ln \sin x \approx \ln x + \ln(\pi - x) - \ln \pi + p(x) \quad (3.8)$$

für $0 \leq x \leq \pi$ angesetzt werden, wobei $p(x)$ ein Polynom darstellt, welches einen Kurvenverlauf entsprechend Bild 3.4 anzunähern hat. Wegen der Symmetrieeigenschaften, die in Gl. (3.7) angegeben sind, ist es ausreichend, eine Näherung für $0 \leq x \leq \pi/2$ zu bestimmen.

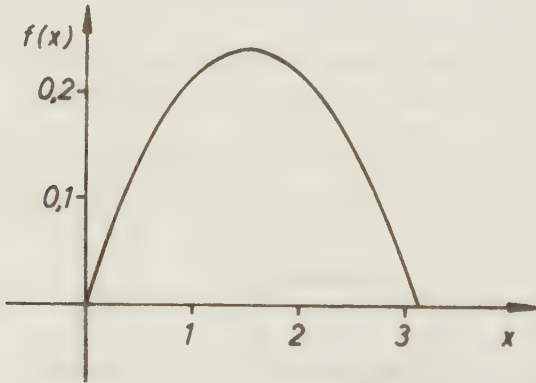


Bild 3.4: Verlauf der Funktion $f(x)$, welche durch ein Polynom $p(x)$ angenähert werden soll

Setzt man voraus, daß $U(\varphi)$ stetig ist und sich stückweise als Polynom darstellen läßt, müssen für die Auswertung von Gl. (3.6) zur Bestimmung der konjugierten Funktion $V(\varphi)$ Integrale der Form

$$\int q(x) dx = Q(x),$$

$$\int x q(x) dx = Q_1(x),$$

$$\int x^2 q(x) dx = Q_2(x),$$

$\vdots$

mit $q(x) = \ln x + \ln(\pi-x) - \ln\pi + p(x) \approx \ln \sin x$
 $(0 \leq x \leq \pi)$
 gelöst werden. In Bild 3.5 sind die prinzipiellen Verläufe der Integranden sowie der zugehörigen Stammfunktionen angegeben.

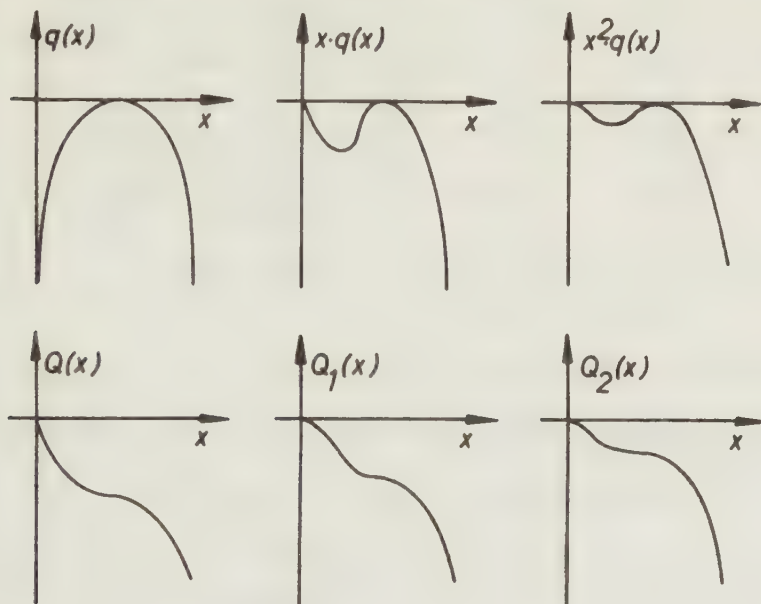


Bild 3.5: Prinzipieller Verlauf der Stammfunktionen $Q(x)$, $Q_1(x)$ und $Q_2(x)$ zur Lösung des Integrals Gl. (3.6)

Unter Verwendung von

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x, \quad \int p(x) dx = P(x),$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}, \quad \int x p(x) dx = P_1(x),$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}, \quad \int x^2 p(x) dx = P_2(x)$$

erhält man

$$Q(x) = x \ln x - (\pi - x) \ln(\pi - x) - \bar{P}(x)$$

mit
$$\bar{P}(x) = P(x) + \pi \ln \pi - x(2 + \ln \pi) ,$$

$$Q_1(x) = \frac{1}{2} [x^2 \ln x + (x^2 - \pi^2) \ln(\pi - x) + \bar{P}_1(x)]$$

mit
$$\bar{P}_1(x) = 2P_1(x) + \pi^2 \ln \pi - x\pi - x^2(1 + \ln \pi) ,$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{3} [x^3 \ln x + (x^3 - \pi^3) \ln(\pi - x) + \bar{P}_2(x)]$$

mit
$$\bar{P}_2(x) = 3P_2(x) + \pi^3 \ln \pi - x\pi^2 - x^2 \frac{\pi}{2} - x^3 \left(\frac{2}{3} + \ln \pi \right) .$$

(3.9)

Dabei wurden die konstanten Terme so bestimmt, daß

$$Q(0) = Q_1(0) = Q_2(0) = 0$$

gilt.

Mit der Bezeichnung

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N$$

für das Polynom $p(x)$, welches entsprechend Gl. (3.8) zur näherungsweisen Darstellung von $\ln \sin x$ dient, gilt für die oben aufgeführten Polynome

$$P(x) = \sum_{i=1}^{N+1} b_i x^i \quad \text{mit} \quad b_i = \frac{a_{i-1}}{i} ,$$

$$P_1(x) = \sum_{i=2}^{N+2} c_i x^i \quad \text{mit} \quad c_i = \frac{a_{i-2}}{i} ,$$

$$P_2(x) = \sum_{i=3}^{N+3} d_i x^i \quad \text{mit} \quad d_i = \frac{a_{i-3}}{i} .$$

Es sei noch das Ergebnis einer Tschebyscheff-Approximation zur Bestimmung des Polynoms $p(x)$ mitgeteilt. Für einen gewählten Grad 8 und den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,88921861249 \cdot 10^{-8}, \\ a_1 &= 0,31830930855, \\ a_2 &= -0,11599987324, \\ a_3 &= 0,10724527578 \cdot 10^{-1}, \\ a_4 &= -0,29331028087 \cdot 10^{-2}, \\ a_5 &= 0,58277272937 \cdot 10^{-3}, \\ a_6 &= -0,12251621424 \cdot 10^{-3}, \\ a_7 &= 0,16556326247 \cdot 10^{-4}, \\ a_8 &= -0,13175105017 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

ergab sich ein Fehler $< 10^{-8}$.

Wie erwähnt, wird in [22] die Funktion $U(\varphi)$ durch einen Polygonzug beschrieben, was bedeutet, daß $dU(\varphi)/d\varphi$ stückweise konstant ist.

Die Berechnung der konjugierten Funktion $V(\varphi)$ kann dabei unter Verwendung von $Q(\varphi)$ Gl. (3.9) erfolgen. Eine andere Möglichkeit, $U(\varphi)$ darzustellen, sind Cubic Spline - Funktionen.

Soll entsprechend Bild 3.6 eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall $x_1 \leq x \leq x_N$ durch eine Cubic Spline - Funktion $f_S(x)$ interpoliert werden, so erfüllt $f_S(x)$ nach Auswahl von N Interpolationsstellen $x_1, x_2, \dots, x_N$ neben der Interpolationseigenschaft noch folgende Bedingungen[3]:

(I) $f_S(x)$ läßt sich in jedem Intervall $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ durch ein Polynom vom Grad 3 darstellen:

$$f_{Si}(x) = a_{0i} + a_{1i}x + a_{2i}x^2 + a_{3i}x^3, \quad i = 1, 2, \dots, (N-1);$$

$$(II) \quad f'_{Si-1}(x_i) = f'_{Si}(x_i) \quad , \quad i = 2, 3, \dots, N-1$$

(Stetigkeit der ersten Ableitungen);

$$(III) \quad f''_{Si-1}(x_i) = f''_{Si}(x_i) \quad , \quad i = 2, 3, \dots, N-1$$

(Stetigkeit der zweiten Ableitungen);

$$(IV) \quad \int_{x_1}^{x_N} [f'_S(x)]^2 dx = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f'_{Si}(x)]^2 dx \stackrel{!}{=} \text{Min.}$$

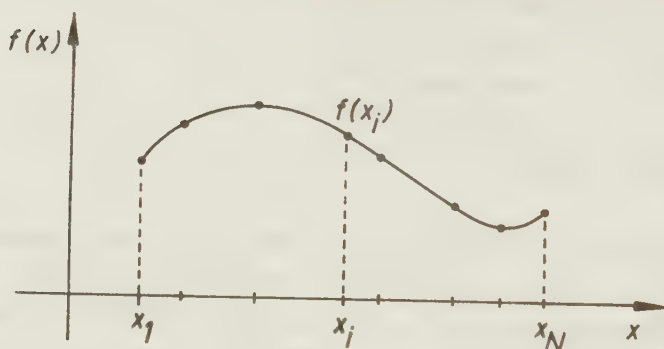


Bild 3.6: Funktion $f(x)$ mit Interpolationsstellen

REINSCH [17] gibt einen stabilen, auch für große Stützstellenanzahl N geeigneten Algorithmus zur Bestimmung der Koeffizienten $a_{0i}, a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, i = 1, 2, \dots, N-1$ an. Für die Berechnung dieser Splinekoeffizienten sind dabei entsprechend Bild 3.6 nur die Stützstellen x_i sowie die Funktionswerte $f(x_i), i = 1, 2, \dots, N$ der zu interpolierenden Funktion $f(x)$ vorzugeben, da wegen der Bedingung (IV) die zweite Ableitung der Spline-Funktion $f'_S(x)$ in den Endpunkten x_1 und x_N Null gesetzt wird. In diesem Fall spricht man von einem natürlichen Spline. Der angegeben Algorithmus läßt sich jedoch unter Außerachtlassung der Bedingung (IV) dahingehend modifizieren,

daß neben der Angabe von x_i und $f(x_i)$ zwei weitere Bedingungen festgelegt werden können, insbesondere können die ersten oder zweiten Ableitungen der Spline-Funktion in den Endpunkten vorgeschrieben werden.

Cubic Splines lassen sich in drei Arten darstellen:

$$f_{Sa}(x) = f_{Sai}(x) = a_{0i} + a_{1i}x + a_{2i}x^2 + a_{3i}x^3 \quad (3.10a)$$

für $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, N-1$;

$$f_{Sb}(x) = f_{Sbi}(x-x_i) = \quad (3.10b)$$

$$= b_{0i} + b_{1i}(x-x_i) + b_{2i}(x-x_i)^2 + b_{3i}(x-x_i)^3$$

für $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, N-1$;

$$f_{Sc}(x) = c_0 + c_{-1}x + c_{-2}x^2 + \sum_{i=1}^{N-1} s(x-x_i) \cdot c_i \cdot (x-x_i)^3. \quad (3.10c)$$

Dabei bedeutet $s(x)$ die Sprungfunktion. Die Darstellungsart für Spline-Funktionen nach Gl. (3.10c) ist in Bild 3.7 veranschaulicht. Die Koeffizienten, die in den Gleichungen (3.10a) und (3.10b) auftreten, lassen sich durch die Beziehungen

$$\begin{bmatrix} a_{0i} \\ a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -x_i & x_i^2 & -x_i^3 \\ 0 & 1 & -2x_i & 3x_i^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3x_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{0i} \\ b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} b_{0i} \\ b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 \\ 0 & 1 & 2x_i & 3x_i^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3x_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{0i} \\ a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{bmatrix}$$

für $i = 1, 2, \dots, N-1$ umrechnen.

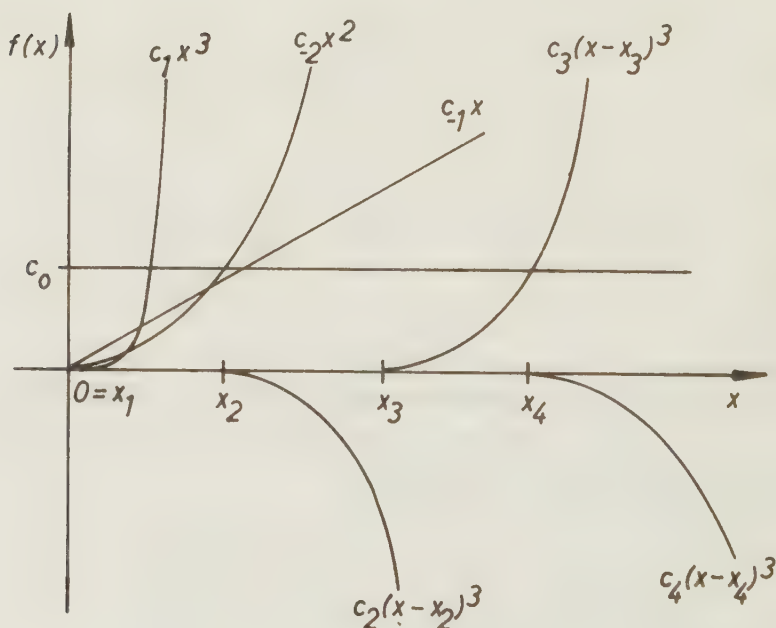


Bild 3.7: Summanden der Spline-Funktion nach Gleichung (3.10a) mit $x_1 = 0$

Für die Diskussion der Spline-Darstellung $f_{Sc}(x)$ nach Gl. (3.10c) wird vorausgesetzt, daß $x_1 = 0$ gilt (für $x_1 \neq 0$ lassen sich entsprechende Gleichungen angeben, die hier jedoch nicht benötigt werden). Mit Hilfe der Beziehungen

$$a_{0i} = c_0 - \sum_{k=1}^i c_k x_k^3 ,$$

$$a_{1i} = c_{-1} + 3 \sum_{k=1}^i c_k x_k^2 ,$$

$$a_{2i} = c_{-2} - 3 \sum_{k=1}^i c_k x_k ,$$

$$a_{3i} = \sum_{k=1}^i c_k , \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

und

$$c_{-2} = a_{21} ,$$

$$c_{-1} = a_{11} ,$$

$$c_0 = a_{01} ,$$

$$c_1 = a_{31} ,$$

$$c_i = a_{3i} - c_{i-1} , \quad i = 2, 3, \dots, N-1$$

können die Darstellungen $f_{Sa}(x)$ Gl. (3.10a) und $f_{Sc}(x)$ Gl. (3.10c) ineinander übergeführt werden.

Faßt man die $(N+2)$ Koeffizienten

$$c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, \dots, c_{N-1}$$

als Parameter auf, die bei einer Spline-Interpolation für N Stützstellen $x_1, x_2, \dots, x_N$ zu bestimmen sind, so stehen bei Berücksichtigung der N Interpolationsbedingungen noch weitere zwei Frei-

heitsgrade zur Verfügung. Wird ein natürlicher Spline verlangt, d.h. $f''_{Sc}(0) = f''_{Sc}(x_N) = 0$, so lauten die Bedingungen hierfür

$$c_{-2} = 0 ,$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} c_i x_i = 0 .$$

Wird mit $\kappa[U(\varphi)] = V(\varphi)$ die zu $U(\varphi)$ konjugierte Funktion bezeichnet, so gilt

$$\kappa[U_1(\varphi) + U_2(\varphi)] = \kappa[U_1(\varphi)] + \kappa[U_2(\varphi)]$$

und $\kappa[K \cdot U(\varphi)] = K \cdot \kappa[U(\varphi)]$, $K = \text{konstant}$.

Mit den Abkürzungen

$$U_{-2}(\varphi) = \varphi^2 ,$$

$$U_{-1}(\varphi) = \varphi ,$$

$$U_0(\varphi) = 1 ,$$

$$U_i(\varphi) = s(\varphi - \varphi_i)(\varphi - \varphi_i)^3 , \quad i = 1, 2, \dots, N-1 ,$$

wobei φ_i die N betrachteten Stützstellen aus dem Intervall $0 \leq \varphi \leq \pi$ mit $\varphi_1 = 0$, $\varphi_N = \pi$ kennzeichnen, läßt sich die Funktion $U(\varphi)$ entsprechend Gl. (3.10c) als Spline-Funktion darstellen:

$$U(\varphi) = \sum_{k=-2}^{N-1} c_k U_k(\varphi) .$$

Für die konjugierte Funktion $V(\varphi)$ gilt dann

$$V(\varphi) = \sum_{k=-2}^{N-1} c_k \kappa[U_k(\varphi)] = \sum_{k=-2}^{N-1} c_k V_k(\varphi) .$$

Es soll nun gezeigt werden, wie die konjugierten Funktionen

$V_k(\varphi) = \kappa[U_k(\varphi)]$, $k = -2, -1, 0, 1, \dots, N-1$ gebildet werden können. Um die Stammfunktionen Q , Q_1 und Q_2 , die in Gl. (3.9) angegeben sind, verwenden zu können, ist das Integral Gl. (3.6) umzuformen. Mit der Abkürzung $f(\vartheta) = dU(\vartheta)/d\vartheta$ und der Substitution $x = (\varphi - \vartheta)/2$ gilt

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\ln \left| \sin \frac{\varphi - \vartheta}{2} \right| \right] f(\vartheta) d\vartheta = \frac{-2}{\pi} \int_{\varphi/2}^{(\varphi - \pi)/2} [\ln |\sin x|] f(\varphi - 2x) dx,$$

mit der Substitution $x = (\varphi + \vartheta)/2$ gilt

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\ln \left| \sin \frac{\varphi + \vartheta}{2} \right| \right] f(\vartheta) d\vartheta = \frac{2}{\pi} \int_{\varphi/2}^{(\varphi + \pi)/2} [\ln |\sin x|] f(2x - \varphi) dx.$$

Die Stammfunktionen Gl. (3.9) sind nur definiert für $0 \leq x \leq \pi$, für die Berechnung obiger Integrale können die Beziehungen

$$Q(-x) = -Q(x),$$

$$Q_1(-x) = Q_1(x),$$

$$Q_2(-x) = -Q_2(x)$$

verwendet werden.

Wegen $dU_0(\varphi)/d\varphi = 0$ gilt

$$V_0(\varphi) = 0. \quad (3.11a)$$

Aus $dU_{-1}(\varphi)/d\varphi = 1$ folgt

$$V_{-1}(\varphi) = \frac{2}{\pi} \left[2Q\left(\frac{\varphi}{2}\right) + Q\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right) - Q\left(\frac{\pi + \varphi}{2}\right) \right]; \quad (3.11b)$$

aus $dU_{-2}(\varphi)/d\varphi = 2\varphi$ folgt

$$V_{-2}(\varphi) = \frac{4}{\pi} \{ 2Q_1(\frac{\pi-\varphi}{2}) - 2Q_1(\frac{\pi+\varphi}{2}) + \varphi [Q(\frac{\pi-\varphi}{2}) + Q(\frac{\pi+\varphi}{2})] \} . \quad (3.11c)$$

Für $U_i(\varphi) = s(\varphi - \varphi_i)(\varphi - \varphi_i)^3$, $i = 1, 2, \dots, N-1$ gilt
 $dU_i(\varphi)/d\varphi = 0$ für $\varphi \leq \varphi_i$ und $dU_i(\varphi)/d\varphi = 3(\varphi - \varphi_i)^2$ für $\varphi > \varphi_i$.
 Bei der Berechnung von $V(\varphi)$ sind drei Fälle zu unterscheiden. Mit der Abkürzung

$$Q_3(\varphi, \varphi_i) = 3 \frac{\pi + \varphi_i}{2} [Q_1(\frac{\pi + \varphi}{2}) - Q_1(\frac{\pi + \varphi_i}{2}) + \\ + (\pi + \varphi_i)(Q(\frac{\pi + \varphi_i}{2}) - Q(\frac{\pi + \varphi}{2}))]$$

gilt für $\varphi < \varphi_i$

$$V_i(\varphi) = \frac{4}{\pi} \{ 2[Q_2(\frac{\pi + \varphi_i}{2}) - Q_2(\frac{\pi + \varphi}{2})] + Q_3(\varphi, \varphi_i) \} ; \quad (3.11d)$$

für $\varphi = \varphi_i$ gilt

$$V_i(\varphi) = \frac{4}{\pi} \{ 2Q_2(\frac{\pi - \varphi}{2}) + Q_3(\varphi, \varphi_i) \} ; \quad (3.11e)$$

für $\varphi > \varphi_i$ gilt

$$V_i(\varphi) = \frac{4}{\pi} \{ 2[Q_2(\frac{\pi - \varphi}{2}) + Q_2(\frac{\varphi - \varphi_i}{2}) + Q_2(\frac{\pi + \varphi_i}{2}) - Q_2(\frac{\pi + \varphi}{2})] + \\ + Q_3(\varphi, \varphi_i) \} . \quad (3.11f)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (3.11a) bis (3.11f) kann nunmehr für jede Funktion $U(\varphi)$, die als Spline entsprechend Gl. (3.10c) dargestellt ist, die konjugierte Funktion $V(\varphi)$ berechnet werden. Für die Spline-Darstellung nach Gl. (3.10a) und (3.10b) für $U(\varphi)$ können entsprechende Beziehungen angegeben werden.

Liegt eine Vorschrift $Z_0(\omega) = X_0(\omega) + jY_0(\omega)$ für einen Frequenzbereich $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ vor, so wird mit Hilfe der Gln. (3.1a) bzw. (3.1b) die Vorschrift vom ω -Bereich in den φ -Bereich transformiert. Bei der Wahl von $\sigma_0 > 0$ kann verwendet werden, daß sich für $\sigma_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ ein maximal großes Approximationsintervall im φ -Bereich ergibt. Der Realteil jeder Zweipolfunktion ist eine gerade Funktion, der Imaginärteil eine ungerade Funktion. Deshalb kann statt des eigentlichen Approximationsintervalls $[-\varphi_1, -\varphi_2]$ mit

$$\varphi_1 = 2 \arctan(\omega_1/\sigma_0),$$

$$\varphi_2 = 2 \arctan(\omega_2/\sigma_0)$$

das Intervall $[\varphi_1, \varphi_2]$ mit $\varphi_1 \geq 0, \pi \geq \varphi_2 > 0$ betrachtet werden, wobei dann das Vorzeichen der Imaginärteilvervorschrift zu ändern ist, während der Realteil unverändert bleibt. Der transformierte Realteil und der transformierte Imaginärteil seien mit $\bar{U}(\varphi)$ und $\bar{V}(\varphi)$ bezeichnet.

Aus dem so gewonnenen Approximationsintervall $[\varphi_1, \varphi_2]$ sind nun $\bar{N}$ Stützstellen $\varphi_1 = \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_{\bar{N}} = \varphi_2$ auszuwählen, für die später der Fehler betrachtet wird. Im folgenden werden diese Werte als Fehlerstützstellen bezeichnet.

Aus dem Intervall $[0, \pi]$ sind $N-1$ Stützstellen $0 = \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1} < \pi$ auszuwählen, die dann als Stützstellen für eine Spline-Darstellung von $U(\varphi)$ entsprechend Gl. (3.10c) dienen. Dabei ist es möglich, jedoch nicht notwendig, daß im Approximationsintervall Fehlerstützstellen $\bar{\varphi}_k$ mit Stützstellen φ_i zusammenfallen.

Die Auswahl der Stützstellen φ_i und $\bar{\varphi}_k$ ist in Bild 3.8 veranschaulicht.

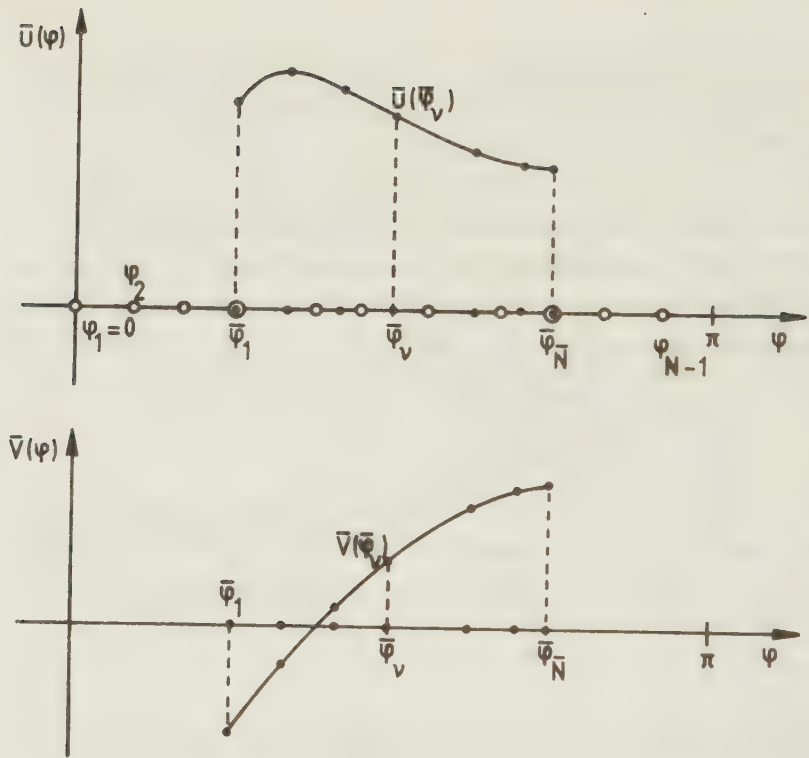


Bild 3.8: Vorschrift $\bar{U}(\varphi)$ und $\bar{V}(\varphi)$, Fehlerstützstellen $\bar{\varphi}_k$ (•) und Stützstellen φ_i für die Spline-Approximation (○)

Bei einem Ansatz von $U(\varphi)$ als Spline-Funktion

$$U(\varphi) = \sum_{k=-2}^{N-1} c_k U_k(\varphi)$$

entsprechend Gl. (3.10c) kann mit Hilfe der Gleichungen (3.11a) bis (3.11f) die konjugierte Funktion

$$V(\varphi) = x \left[\sum_{k=-2}^{N-1} c_k U_k(\varphi) \right] = \sum_{k=-2}^{N-1} c_k V_k(\varphi)$$

berechnet werden.

Faßt man die Funktionswerte von $U(\varphi)$ und $V(\varphi)$ im Approximationsintervall in den Stützstellen $\bar{\varphi}_k$, $k = 1, 2, \dots, \bar{N}$ sowie die Koeffizienten c_i , $i = -2, -1, 0, \dots, N-1$ der Spline-Darstellung entsprechend

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} U(\bar{\varphi}_1) \\ U(\bar{\varphi}_2) \\ \vdots \\ U(\bar{\varphi}_{\bar{N}}) \end{bmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{bmatrix} V(\bar{\varphi}_1) \\ V(\bar{\varphi}_2) \\ \vdots \\ V(\bar{\varphi}_{\bar{N}}) \end{bmatrix},$$

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix}$$

zu Vektoren $\underline{u}$, $\underline{v}$ und $\underline{c}$ zusammen, dann können Matrizen $\underline{U}$ und $\underline{V}$ definiert werden mit

$$\underline{u} = \underline{U} \underline{c} \quad (3.12a)$$

$$\text{und} \quad \underline{v} = \underline{V} \underline{c} \quad (3.12b)$$

Dabei gilt für die $(N+2) \times \bar{N}$ - Matrizen $\underline{U}$ und $\underline{V}$

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} U_{-2}(\bar{\varphi}_1) & U_{-1}(\bar{\varphi}_1) & U_0(\bar{\varphi}_1) & \dots & U_{N-1}(\bar{\varphi}_1) \\ U_{-2}(\bar{\varphi}_2) & U_{-1}(\bar{\varphi}_2) & U_0(\bar{\varphi}_2) & \dots & U_{N-1}(\bar{\varphi}_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{-2}(\bar{\varphi}_{\bar{N}}) & U_{-1}(\bar{\varphi}_{\bar{N}}) & U_0(\bar{\varphi}_{\bar{N}}) & \dots & U_{N-1}(\bar{\varphi}_{\bar{N}}) \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} V_{-2}(\bar{\varphi}_1) & V_{-1}(\bar{\varphi}_1) & V_0(\bar{\varphi}_1) & \dots & V_{N-1}(\bar{\varphi}_1) \\ V_{-2}(\bar{\varphi}_2) & V_{-1}(\bar{\varphi}_2) & V_0(\bar{\varphi}_2) & \dots & V_{N-1}(\bar{\varphi}_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ V_{-2}(\bar{\varphi}_{\bar{N}}) & V_{-1}(\bar{\varphi}_{\bar{N}}) & V_0(\bar{\varphi}_{\bar{N}}) & \dots & V_{N-1}(\bar{\varphi}_{\bar{N}}) \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Bei einer numerischen Behandlung der Gleichungen (3.12a) und (3.12b) können folgende Gesichtspunkte berücksichtigt werden:

- 1) Wegen $U_0(\varphi) = 1$ kann die 3. Spalte der Matrix $\underline{U}$ sowie das dritte Element des Vektors $\underline{c}$ gestrichen werden, falls man in Gl. (3.12a) einen Vektor $c_0 \underline{E}$ additiv berücksichtigt. Der Einheitsvektor $\underline{E}$ besitzt dabei die Dimension $\bar{N}$.
- 2) Alle Elemente u_{ik} der Matrix $\underline{U}$ verschwinden, für die gilt $\varphi_k \geq \bar{\varphi}_i$, $k = 2, 3, \dots, N-1$, $i = 1, 2, \dots, \bar{N}$. Dies bedeutet, daß in allen Fällen, in denen r Stützstellen φ_k mit $\varphi_k \geq \bar{\varphi}_{\bar{N}}$ vorliegen, die letzten r Spalten von $\underline{U}$ gestrichen werden können, wobei der Vektor $\underline{c}$ in Gl. (3.12a) in entsprechen-

der Weise zu verkürzen ist.

- 3) Symmetrien bezüglich der Stützstellenverteilungen φ_i und $\bar{\varphi}_k$ können bei der Bestimmung von $U_i(\bar{\varphi}_k)$ berücksichtigt werden. Gilt beispielsweise $\bar{\varphi}_k - \varphi_i = \bar{\varphi}_{k+r} - \varphi_{i+1}$, dann gilt auch $U_i(\bar{\varphi}_k) = U_{i+1}(\bar{\varphi}_{k+r})$.
- 4) Wegen $U_0(\varphi) = 1$ und $V_0(\varphi) = \kappa[U_0(\varphi)] = 0$ kann die 3. Spalte von $\underline{V}$ sowie das 3. Element des Vektors $\underline{c}$ in Gl. (3.12b) gestrichen werden.
- 5) Die Matrix $\underline{V}$ hängt (ebenso wie die Matrix $\underline{U}$) ausschließlich ab von der Spline-Stützstellenverteilung φ_i im Intervall $[0, \pi]$ sowie von der Fehler-Stützstellenverteilung im Approximationsintervall $[\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_N]$. Soll eine weitere Fehler-Stützstelle $\bar{\varphi}_r$ betrachtet werden, so ist jeweils eine neue Zeile in die Matrizen $\underline{U}$ und $\underline{V}$ einzufügen; eine neue Spline-Stützstelle φ_s bedeutet das Hinzufügen einer weiteren Spalte zu den Matrizen $\underline{U}$ und $\underline{V}$.
- 6) Für ein vorgegebenes Stützstellenraster $\varphi_i = \bar{\varphi}_i$, $i = 1, \dots, M$ kann einmalig eine $(M+2) \times M$ - Matrix $\underline{V}_M$ berechnet und gespeichert werden. Für ein vorliegendes Problem können dann $N-1$ Spline-Stützstellen und $\bar{N}$ Fehlerstützstellen aus dem Approximationsintervall ausgewählt werden; aus entsprechenden Zeilen und Spalten der Matrix $\underline{V}_M$ kann dann die aktuelle Matrix $\underline{V}$ gebildet werden. Dabei ist allerdings das vorgegebene Raster zu berücksichtigen.
- 7) Bei der unter Punkt 6 genannten Methode müssen alle Fehlerstützpunkte im Approximationsintervall einem vorgegebenem Raster

entstammen. Dies ist für viele Anwendungen ungünstig, insbesondere wenn das Approximationsintervall klein ist. Um die Einschränkung, daß die Fehlerstützstellen nur festgelegte Werte annehmen können, zu umgehen, kann folgendermaßen vorgegangen werden. Da die zu $U_i(\varphi)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$ (die Fälle $i = -2, -1, 0$ können gesondert behandelt werden) konjugierte Funktion $V_i(\varphi)$ ausschließlich von dem Spline-Stützpunkt φ_i abhängt, kann nach Wahl eines Stützstellenrasters für jedes φ_i die konjugierte Funktion $V_i(\varphi)$ berechnet und durch einen Spline $V_{Si}(\varphi)$ entsprechend Gl. (3.10c) interpoliert werden. Statt der Interpolation durch einen Spline kann auch eine gleichmäßige Approximation von $V_i(\varphi)$ durch eine Spline-Funktion entsprechend Gl.(3.10c) durchgeführt werden. Dies bedeutet, daß nach Festlegung der N_V Stützstellen die Koeffizienten c_i , $i = -2, -1, \dots, N_V-1$ der Spline-Darstellung nach Gl. (3.10c) als Parameter angesehen werden, die einer Optimierung zu unterziehen sind. Als Ausgangsnäherung kann dabei die Spline-Interpolation verwendet werden.

Spline-Funktionen nach Gl. (3.10c) eignen sich gut für die Approximation von $V_i(\varphi)$, wie aus der Darstellung von zwei konjugierten Funktionen in Bild 3.9 zu ersehen ist.

Die konjugierte Funktion $V_i(\varphi)$ wird also angenähert durch einen Spline $V_{Si}(\varphi)$, dieser Spline wird repräsentiert durch einen Stützstellenvektor Φ_i und einen Koeffizientenvektor $\underline{d}_i$. Verwendet man für alle Annäherungen $V_{Si}(\varphi)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$ den gleichen Stützstellenvektor $\underline{\Phi}$, so kann man alle Koeffizientenvektoren $\underline{d}_i$ zu einer Matrix $\underline{D}$ zusammenfassen. Die Matrix $\underline{D}$ sowie die beiden Spline-Stützstellenvektoren für $U(\varphi)$ und $V(\varphi)$, die identisch sein können, beinhalten dann alle Daten, die benötigt werden, um aus einer Funktion $U(\varphi)$ die konjugierte Funktion $V(\varphi)$ zu berechnen.

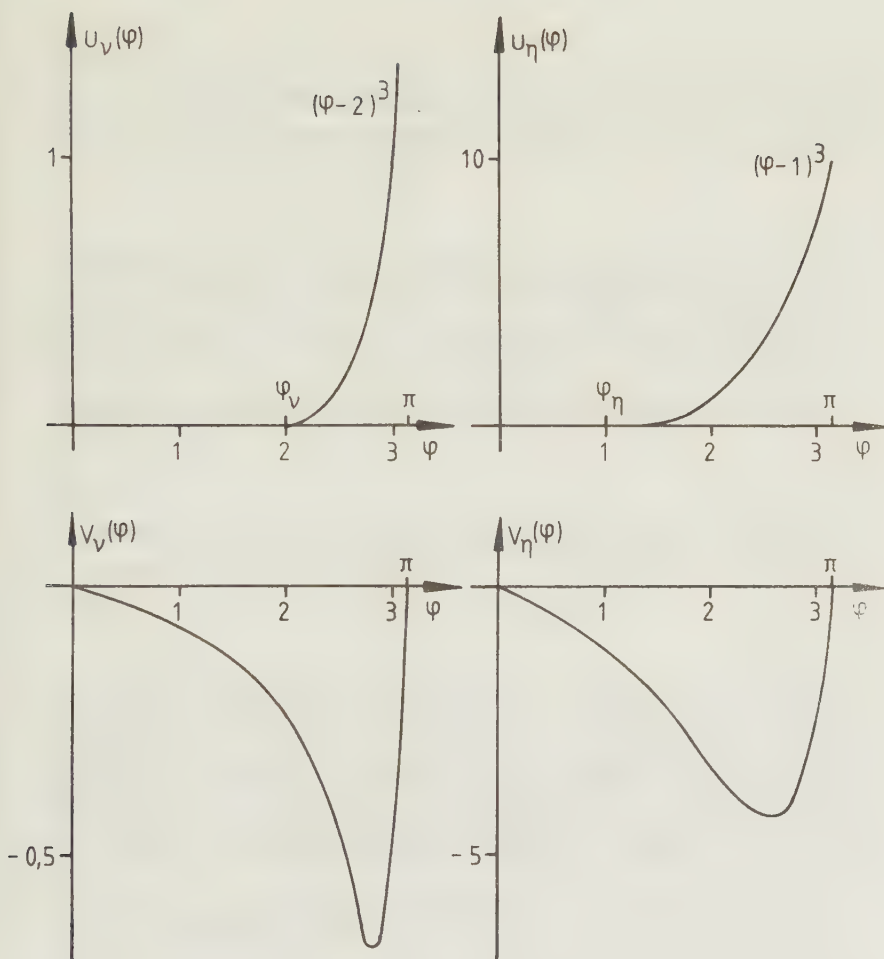


Bild 3.9: Verlauf von zwei konjugierten Funktionen $V_i(\varphi) = \kappa[U_i(\varphi)]$

Somit ist ein schneller Algorithmus gefunden zur Berechnung von konjugierten Funktionen. Dieser Algorithmus soll im Hinblick auf eine Programmierung in sieben Schritten zusammengefaßt werden.

Schritt 1:

Auswahl und Speicherung eines Stützstellenvektors $\underline{\psi}$ (Dimension N_{ψ}) zur Spline-Darstellung von $U(\varphi)$ im Intervall $[0, \pi]$.

Schritt 2:

Auswahl und Speicherung eines Stützstellenvektors $\underline{\psi}$ (Dimension N_{ψ}) zur Spline-Darstellung von $V_i(\varphi)$. Es ist möglich, $\underline{\varphi} = \underline{\psi}$ zu wählen, wobei die Stützstellen äquidistant im Intervall $[0, \pi]$ verteilt sind.

Die Schritte 3 und 4 sind für $i = -2, -1, \dots, N-1$ durchzuführen.

Schritt 3:

Berechnung von $V_i(\varphi)$ unter Verwendung der Gleichungen (3.11a) bis (3.11f).

Schritt 4:

Berechnung eines interpolierenden Splines $V_{Si}(\varphi)$ unter Verwendung des Stützstellenvektors $\underline{\psi}$ und der Darstellungsart für den Spline nach Gl. (3.10c); Verbesserung der Annäherung durch Aufsuchen einer gleichmäßigen Approximation von $V_i(\varphi)$ durch $V_{Si}(\varphi)$. Die bei der Spline-Darstellung von $V_{Si}(\varphi)$ auftretenden Koeffizienten werden als Vektor $\underline{d}$ als Spalte der Spline-Koeffizientenmatrix $\underline{D}$ gespeichert. Es ist zu überprüfen, ob die Spline-Approximation eine ausreichende Genauigkeit besitzt, d.h. ob

$$\max_{0 \leq \varphi \leq \pi} |V_{Si}(\varphi) - V_i(\varphi)| \leq \varepsilon$$

für eine vorgegebene Schranke ε gilt. Ist dies nicht der Fall, so ist entsprechend Schritt 2 ein anderer, möglicherweise erweiterter Stützstellenvektor $\underline{\psi}$ zu verwenden.

Schritt 5:

Bei Vorlage einer Approximationsaufgabe in einem Intervall $[\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_N]$ ist die Anzahl $\bar{N}$ und die Lage der betrachteten $\bar{\varphi}_i$ - Werte im Approximationsintervall festzulegen.

Schritt 6:

Es ist ein aktueller, d.h. bei der vorliegenden Aufgabe zu verwendender Stützstellensatz für die Spline-Darstellung von $U(\varphi)$ festzulegen, wobei als Stützstellen φ_i nur Werte zulässig sind, die als Elemente im Vektor $\underline{\varphi}$ entsprechend Schritt 1 enthalten sind.

Schritt 7:

Bestimmung der Matrix $\underline{V}$ Gl. (3.14) durch Berechnung der Spline-Funktion $V_{Si}(\bar{\varphi}_k)$ unter Verwendung der entsprechenden Koeffizienten aus der Matrix $\underline{D}$ sowie des Stützstellenvektors $\underline{\varphi}$.

Zu bemerken ist, daß die Schritte 1 bis 4 einmalig durchzuführen sind, die erhaltenen Daten können dann für alle Approximationsaufgaben Verwendung finden. Die Bestimmung der Matrix $\underline{V}$ mit Hilfe der Schritte 5 bis 7 ist einmalig durchzuführen, falls sich die betrachteten Werte $\bar{\varphi}_i$ im Approximationsintervall nicht ändern.

Liegt eine Vorschrift $\bar{U}(\varphi)$ und $\bar{V}(\varphi)$ im Intervall $[\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_N]$ vor, so kann die Approximationsaufgabe nunmehr folgendermaßen formuliert werden. Gesucht sind Funktionen $U(\varphi)$ und $V(\varphi)$ mit (vgl. Bild 3.10)

- ① $U(\varphi)$ approximiert $\bar{U}(\varphi)$ im Intervall $[\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_N]$;
- ② es gilt $U(\varphi) \geq 0$ für $0 \leq \varphi \leq \pi$;
- ③ $U(\varphi)$ und $V(\varphi)$ sind konjugierte Funktionen;
- ④ $V(\varphi)$ approximiert $\bar{V}(\varphi)$ im Intervall $[\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_N]$.

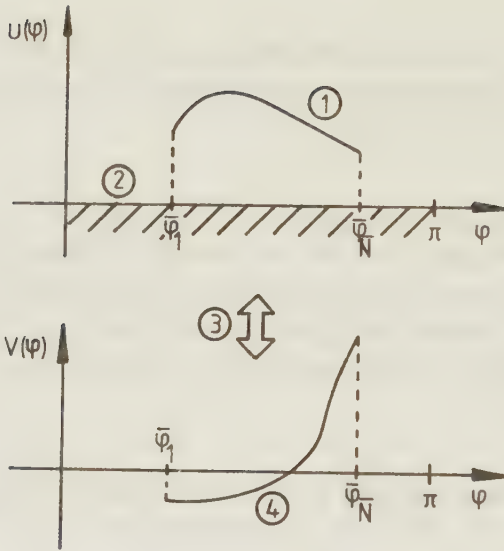


Bild 3.10: Schematische Darstellung des Approximationsproblems

Für einen Ansatz von $U(\varphi)$ nach Gl. (3.10c) ist es naheliegend, die Koeffizienten c_i , $i = -2, -1, \dots, N-1$ als Parameter zu verwenden. Werden diese Koeffizienten zum Parametervektor

$$\underline{x} = (c_{-2}, c_{-1}, \dots, c_{N-1})^T$$

der Dimension $N+2$ zusammengefaßt, so gilt

$$U(\varphi) = x_1 \varphi^2 + x_2 \varphi + x_3 + \sum_{i=1}^{N-1} s(\varphi - \bar{\varphi}_i) x_{i+3} (\varphi - \bar{\varphi}_i)^3. \quad (3.15)$$

Für die Vektoren $\underline{u}$ und $\underline{v}$, die die Funktionswerte $U(\bar{\varphi}_i)$ und $V(\bar{\varphi}_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ beinhalten, gilt entsprechend den Gleichungen (3.12a,b)

$$\underline{u} = \underline{U} \underline{x}, \quad \underline{v} = \underline{V} \underline{x}.$$

Für jeden Winkel $\bar{\varphi}_i$ aus dem Approximationsintervall ist nun ein Fehler $F_i = f(\bar{\varphi}_i)$ zu definieren. Mit

$$\Delta U(\bar{\varphi}_i) = U(\bar{\varphi}_i) - \bar{U}(\bar{\varphi}_i)$$

und $\Delta V(\bar{\varphi}_i) = V(\bar{\varphi}_i) - \bar{V}(\bar{\varphi}_i)$

$$\text{kann } f(\bar{\varphi}_i) = F_i = \sqrt{[\Delta U(\bar{\varphi}_i)]^2 + [\Delta V(\bar{\varphi}_i)]^2} \quad (3.16)$$

gewählt werden. Andere Fehlerdefinitionen, wie sie in Kapitel 2 beschrieben sind, sind möglich.

Bei Verwendung von Gl. (3.16) gilt für die Elemente J_{ik} der Jacobi-Matrix J

$$J_{ik} = 0 \quad \text{für } \Delta U(\bar{\varphi}_i) = \Delta V(\bar{\varphi}_i) = 0$$

und
$$J_{ik} = [\Delta U(\bar{\varphi}_i)^2 + \Delta V(\bar{\varphi}_i)^2]^{-\frac{1}{2}} \left[\Delta U(\bar{\varphi}_i) \frac{\partial U(\bar{\varphi}_i)}{\partial x_k} + \Delta V(\bar{\varphi}_i) \frac{\partial V(\bar{\varphi}_i)}{\partial x_k} \right]$$

sonst.

Die partiellen Ableitungen $\partial U(\bar{\varphi}_i)/\partial x_k$ und $\partial V(\bar{\varphi}_i)/\partial x_k$ können direkt den Matrizen $\underline{U}$ und $\underline{V}$ entnommen werden.

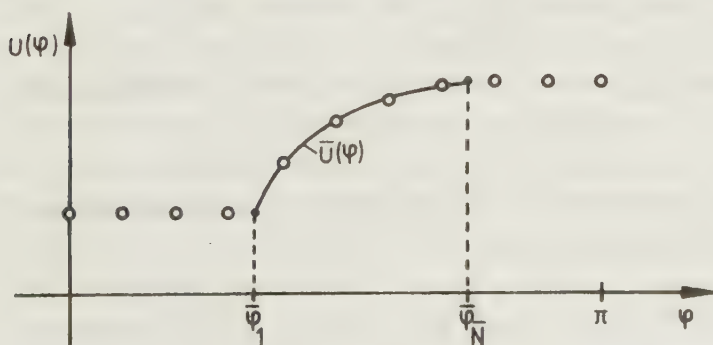


Bild 3.11: Stützstellen (○) für die Ausgangsnäherung der Spline-funktion $U(\varphi)$

Als Ausgangsnäherung für die Funktion $U(\varphi)$ kann entsprechend Bild 3.11 ein Spline gewählt werden mit den Stützstellen

$$U(\varphi_1) = \bar{U}(\bar{\varphi}_1) \quad \text{für} \quad \varphi_1 \leq \bar{\varphi}_1 ,$$

$$U(\varphi_1) = \bar{U}(\varphi) \quad \text{für} \quad \bar{\varphi}_1 < \varphi_1 < \bar{\varphi}_N$$

und
$$U(\varphi_1) = \bar{U}(\bar{\varphi}_N) \quad \text{für} \quad \varphi_1 \geq \bar{\varphi}_N .$$

Bei Vorlage des Fehlervektors

$$\underline{F} = [f(\bar{\varphi}_1), f(\bar{\varphi}_2), \dots, f(\bar{\varphi}_N)]^T,$$

der Jacobi-Matrix und einer Ausgangsnäherung für $U(\varphi)$ kann eine Optimierung durchgeführt werden, wobei mit Hilfe einer Schrankenoptimierung, wie sie in Kapitel 2 beschrieben ist, auch eine gleichmäßige Annäherung im Approximationsintervall angestrebt werden kann.

Das Ergebnis einer Optimierung erfüllt entsprechend Bild 3.10 die Punkte 1, 3 und 4. Dies bedeutet, daß das Ergebnis der beschriebenen nicht rationalen Approximation als Ausgangspunkt zur Bestimmung einer rationalen, reellen, in der abgeschlossenen rechten p -Halbebene analytischen Funktion $H(p)$ verwendet werden kann. Dabei ist $H(p)$ nicht notwendigerweise eine positive Funktion, also Zweipolfunktion, da die Bedingung $U(\varphi) \geq 0$ für $0 \leq \varphi \leq \pi$ hier keine Berücksichtigung findet. Ist allerdings diese Bedingung erfüllt, können $U(\varphi)$ und $V(\varphi)$ als Ausgangspunkt für eine rationale Approximation dienen, die dann eine Zweipolfunktion liefert, falls die rationale Approximation ausreichend genau ist.

Bei Berücksichtigung der Bedingung $U(\varphi) \geq 0$ ist der Fehlervektor $\underline{F}$ zu erweitern:

$$\underline{F} = [f_1, f_2, \dots, f_N, f_{z1}, f_{z2}, \dots, f_{zM}]^T.$$

Die $\bar{N}$ Elemente $f_1, f_2, \dots, f_{\bar{N}}$ stellen die Fehler im Approximationsintervall dar, während die M zusätzlichen Elemente $f_{z1}, f_{z2}, \dots, f_{zM}$ eine Verletzung der Positivität von $U(\varphi)$ außerhalb des Approximationsintervalls berücksichtigen. Dabei wird angenommen, daß die Vorschrift $\bar{U}(\varphi)$ im Approximationsintervall genügend große positive Werte besitzt, so daß bei einer ausreichenden Annäherung auch im Approximationsintervall die Positivität von $U(\varphi)$ gesichert ist.

Für numerische Berechnungen ist es günstig, statt der Positivität $U(\varphi) \geq 0$ die Bedingung $U(\varphi) \geq \varepsilon, \varepsilon > 0$ zu verlangen. Als Fehler ist dann

$$\begin{aligned} f_z(\varphi) &= 0 & \text{für } U(\varphi) \geq \varepsilon, \\ f_z(\varphi) &= (\varepsilon - U(\varphi))^n & \text{für } U(\varphi) < \varepsilon \end{aligned}$$

zu wählen. Der Exponent $n > 1$ gewichtet starke Abweichungen von der Positivitätsbedingung; der Wert $n = 2$ hat sich bewährt. Für die partielle Ableitung des Fehlers $f_z(\varphi)$ nach einem Parameter x_k gilt für $f_z(\varphi) \neq 0$

$$\frac{\partial f_z(\varphi)}{\partial x_k} = -n [\varepsilon - U(\varphi)]^{n-1} \cdot \frac{\partial U(\varphi)}{\partial x_k},$$

wobei die partielle Ableitung $\partial U(\varphi) / \partial x_k$ in einfacher Weise aus der Darstellung von $U(\varphi)$ Gl. (3.15) gewonnen werden kann.

In vielen Fällen ist neben der Vorschrift $\bar{U}(\varphi), \bar{V}(\varphi)$ auch noch ein zulässiger Fehler $S_0 > 0$ angegeben, d.h. die Vorschrift ist als erfüllt zu betrachten, falls

$$[\Delta U(\varphi)]^2 + [\Delta V(\varphi)]^2 \leq S_0^2$$

im Approximationsintervall gilt; hierbei wird eine Fehlerdefinition nach Gl. (3.16) angenommen. Dann kann

$$\varepsilon = [S_0]^{1/n} \quad (3.17)$$

gewählt werden. Dies bedeutet für eine Schrankenoptimierung, wie sie in Kapitel 2 dargestellt ist, daß bei einer sukzessiven Verkleinerung der Fehlerschranke S entsprechend Bild 2.6 bis auf den Wert S_0 dann $U(\varphi) > 0$ gilt, falls alle Fehler f_i nach Gl. (2.6) Null sind.

Es besteht die Möglichkeit, für die Bestimmung der Fehler f_{zi} , $i = 1, 2, \dots, M$ Winkel φ_{zi} so festzulegen, daß sie äquidistant in den Intervallen $[0, \bar{\varphi}_1]$ und $[\bar{\varphi}_N, \pi]$ verteilt sind; die Aufteilung der M Werte auf die beiden Intervalle ist abhängig von der Größe der Intervalle.

Dieses Vorgehen hat den Nachteil, daß entweder M sehr groß gewählt werden muß oder aber es besteht die Gefahr, daß der Kurvenverlauf von $U(\varphi)$ außerhalb des Approximationsintervalls durch die Funktionswerte $U(\varphi_{zi})$, $i = 1, 2, \dots, M$ nur unzureichend beschrieben wird. Wird ein Optimierprogramm mit Schrankenoptimierung verwendet, das nur Fehler berücksichtigt, die ungleich Null sind, z.B. eine modifizierte Version von [25], so kann M groß gewählt werden, ohne daß die Rechenzeit zur Lösung des Approximationsproblems in entsprechendem Maße ansteigt, jedoch wird für die Berechnung viel Speicherplatz benötigt, da $\bar{N}+M$ Fehler zu betrachten sind und die Jacobi-Matrix $(\bar{N}+M)(N+2)$ Elemente enthält, wobei $N+2$ die Anzahl der Parameter darstellt.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, nur Werte φ_z mit $U(\varphi_z) < \varepsilon$ neben den Werten aus dem Approximationsintervall zu betrachten und

an das Optimierprogramm zu übergeben. Für welche Werte $U(\varphi_z) - \varepsilon$ negativ wird, kann dadurch berechnet werden, daß man die Spline-Funktion jeweils im Intervall $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$ betrachtet mit $i = 1, 2, \dots$ $\dots, N-1$. Die Werte φ_i stellen dabei die Spline-Stützpunkte dar. Gilt $U(\varphi_i) > \varepsilon$ und $U(\varphi_{i+1}) > \varepsilon$, dann sind die Nullstellen φ_{01} und φ_{02} der Ableitung $dU(\varphi)/d\varphi$ zu berechnen, was die Lösung einer quadratischen Gleichung bedeutet. Sind die Nullstellen konjugiert komplex oder reell, aber nicht im Intervall $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$, so ist $U(\varphi) - \varepsilon$ im betrachteten Intervall positiv. Für reelle Nullstellen der Ableitung im Intervall, sie kennzeichnen Extremwerte, falls $d^2U(\varphi)/d\varphi^2$ ungleich Null ist, sind die Funktionswerte für $U(\varphi)$ zu berechnen.

Versteht man unter einem Optimierschritt einen Rechengang, bei dem der Vektor $\underline{x}$ so um $\Delta \underline{x}$ geändert wird, daß sich bezüglich des gewählten Fehlerkriteriums der Fehler verkleinert, so kann man mehrere Optimierschritte, die nacheinander ausgeführt werden, zu einem Optimierzcyklus zusammenfassen. Innerhalb eines Optimierzcyklus seien die Daten bezüglich Vorschrift, Auswahl der betrachteten φ -Werte und die Definition des Fehlers einschließlich einer aktuellen Schranke S für den Fehler entsprechend Bild 2.6 konstant. Bei sukzessiver Verkleinerung der Schranke S werden dann mehrere Optimierzyklen nacheinander ausgeführt, sie können zu einem Schrankenzyklus zusammengefaßt werden.

Wesentlich ist, daß bei einem Optimierzcyklus stets das Optimum bezüglich der betrachteten φ -Werte gesucht wird. Dies bedeutet, daß die Bedingung $U(\varphi) > \varepsilon$ nur in den zu Beginn eines Optimierzcyklus vorgegebenen Stellen φ berücksichtigt wird.

Um die gegensätzlichen Forderungen

a) Anzahl der betrachteten φ -Werte möglichst groß, um $U(\varphi)$ im ge-

samen Intervall $[0, \pi]$ zu beschreiben und die Bedingung $U(\varphi) \geq 0$ zu garantieren;

- b) Anzahl der betrachteten φ -Werte möglichst klein, um eine schnelle Optimierung durchführen zu können, zu vereinen, wird folgender Algorithmus vorgeschlagen.

1) Sind $N-1$ Spline-Intervalle $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$ mit $0=\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_{N-1} < \varphi_N=\pi$ vorhanden, so wird die Anzahl der betrachteten φ -Werte auf $4N-3$ begrenzt. Da für $N-1$ Spline-Intervalle insgesamt $N+2$ Parameter vorhanden sind, besitzt die Jacobi-Matrix $(4N-3)(N+2)$ Elemente.

- 2) Die zu betrachtenden φ -Werte werden klassifiziert, wie es in Bild 3.12 dargestellt ist:

Typ I: alle Spline-Stützstellen $0=\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N=\pi$;

Typ II: φ -Werte, für die gilt $U(\varphi) < \varepsilon$;

Typ III: φ -Werte, für die gilt $U(\varphi) < \bar{\varepsilon}$ mit $\bar{\varepsilon} > \varepsilon$;

Typ IV: φ -Werte aus dem Approximationsintervall $[\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_N]$.

Gilt für ein Spline-Intervall $U(\varphi) < \bar{\varepsilon}$, so sind neben den Spline-Stützstellen drei weitere Werte aus diesem Intervall zu wählen, wobei das Minimum von $U(\varphi)$ in diesem Intervall zu berücksichtigen ist. Gilt $U(\varphi) > \bar{\varepsilon}$ für ein Spline-Intervall, so sind aus diesem Intervall neben den Werten φ_i und φ_{i+1} (Typ I) keine weiteren Werte zu wählen. Die Anzahl der Werte vom Typ IV aus dem Approximationsintervall ist festgelegt durch die Gesamtzahl $4N-3$ der betrachteten φ -Werte.

- 3) Für einen entsprechend 2) festgelegten Vektor $\underline{\varphi}$, der alle betrachteten Winkelwerte zusammenfaßt, ist ein Optimierzyklus durchzuführen. Nach jedem Optimierzyklus ist zu überprüfen, ob eine Neufestlegung des Vektors $\underline{\varphi}$ vorzunehmen ist.

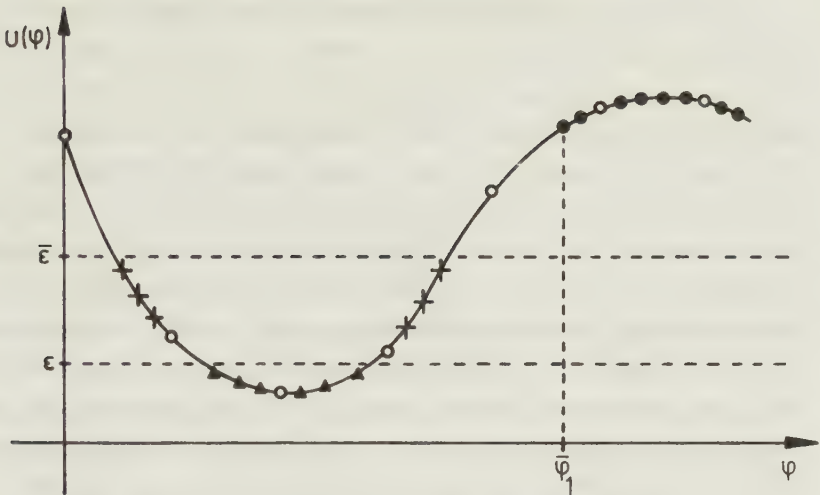


Bild 3.12: Schematische Darstellung der bei der Optimierung betrachteten φ -Werte:

- Spline-Stützstellen (Typ I),
- ▲ φ -Werte mit $U(\varphi) < \epsilon$ (Typ II),
- + φ -Werte mit $U(\varphi) < \bar{\epsilon}$ (Typ III),
- φ -Werte aus dem Approximationsintervall $[\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_N]$ (Typ IV)

- 4) Konvergiert das Optimierverfahren nicht, so ist mit $4N-3$ betrachteten φ -Werten, wobei jedes Spline-Intervall durch vier Werte beschrieben wird, eine neue Optimierung durchzuführen. Die Werte des $\underline{\varphi}$ -Vektors werden dabei nicht verändert.
- 5) Ist das Ergebnis unbefriedigend, ist eine neue Verteilung der Spline-Stützstellen vorzunehmen, wobei das erhaltene unbefriedigende Ergebnis für die Auswahl der Stützstellen mit verwendet werden kann.

Der dargestellte Algorithmus besitzt den Vorteil, daß die Anzahl der betrachteten φ -Werte konstant ist und die Verteilung dieser Werte im Intervall $[0, \pi]$ abhängig ist vom aktuellen Verlauf von $U(\varphi)$. Außerhalb des Approximationsintervalls werden stets eine feste Anzahl Werte vom Typ I betrachtet, hinzu kommen Werte, für die die Beziehung $U(\varphi) > \varepsilon$ verletzt wird (Typ II) und Werte vom Typ III, bei denen Gefahr besteht, daß die Positivitätsbedingung innerhalb eines Optimierzyklus verletzt wird; während eines Optimierschrittes werden φ -Werte vom Typ III nicht zur Bestimmung des Verbesserungsschrittes Δx herangezogen, da dort der Fehler Null ist. Die Wahl der Schranke $\bar{\varepsilon}$ ist abhängig vom Schwierigkeitsgrad des Approximationsproblems, für gutartige Probleme ist $\bar{\varepsilon} = 2\varepsilon$, für schwierige Probleme $\bar{\varepsilon} \approx 10\varepsilon$ zu setzen, wobei ε entsprechend Gl. (3.17) abhängig ist von der Güte der anzustrebenden Näherung.

Wie erwähnt, dient das Ergebnis einer nicht rationalen Approximation als Ausgangspunkt für eine rationale Approximation, um eine rationale, reelle und positive Zweipolfunktion zu erhalten. In [18], [22] werden Verfahren zur allgemeinen rationalen Approximation beschrieben. Es besteht jedoch auch die Möglichkeit, statt einer Annäherung durch allgemeine rationale, reelle Funktionen einen Ansatz für die Zweipolfunktion $Z(p)$ zu wählen, bei dem bei beliebiger Wahl der zu bestimmenden Parameter das Ergebnis stets eine Zweipolfunktion darstellt. Vorgehensweisen hierzu sind im nächsten Kapitel beschrieben, wobei zu bemerken ist, daß durch die nicht rationale Approximation ein näherungsweise Verlauf für $Z(j\omega)$ nicht nur im Approximationsintervall, sondern für $0 \leq \omega \leq \infty$ gefunden wurde.

4 ZWEIPOLFUNKTIONEN IN PARAMETRISCHER DARSTELLUNG

Bei der Ortskurvenapproximation durch Schaltungsoptimierung wurde der Parametervektor

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{NX})^T$$

der Eingangsimpedanz $Z(j\omega, \underline{x})$ verändert, um Lösungen zu erhalten. Ist der Parametervektor $\underline{x}$ in der Weise definiert, daß alle Bauelemente der betrachteten Schaltung nicht negative Werte aufweisen, so erhält man nach Ersetzen von $j\omega$ durch p mit $Z(p, \underline{x})$ eine parametrische Darstellung für eine Klasse von Zweipolfunktionen. Diese Klasse ist definiert durch die Angabe der verwendeten Schaltungsstruktur.

Besitzt die betrachtete Schaltung N Energiespeicher, so kann dabei allerdings nicht garantiert werden, daß die beste Lösung aus der Klasse der Zweipolfunktionen vom Grade N gefunden ist, vielmehr repräsentiert eine Schaltungsstruktur mit N Energiespeichern nur eine Untermenge aller möglichen Zweipolfunktionen vom Grade N . Dies ist bereits der Fall für Zweipolfunktionen vom Grade Eins; bei Ansatz einer Schaltungsstruktur mit einem Energiespeicher ist zu entscheiden, ob eine Kapazität oder eine Induktivität verwendet wird.

Im folgenden werden Ansätze für Zweipolfunktionen $Z(p, \underline{x})$ behandelt, die bei Variation des Parametervektors $\underline{x}$ die gesamte Klasse der Zweipolfunktionen vom Grade N umfassen.

4.1 Zweipolfunktionen, die sich mit nur zwei Elementarten realisieren lassen

Zweipolfunktionen, die sich als Impedanz ausschließlich unter Verwendung von Induktivitäten und Kapazitäten realisieren lassen, sind stets in der Form

$$Z_{LC}(p) = \frac{A_0}{p} + A_\infty p + \sum_{i=1}^r \frac{2A_i p}{p^2 + \omega_i^2} \quad (4.1)$$

mit $A_0 \geq 0$, $A_\infty \geq 0$, $A_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, r$

darstellbar [20] .

Werden nur die Elemente ohmscher Widerstand und Induktivität zugelassen, so gilt stets für die entsprechende Zweipolfunktion

$$Z_{RL}(p) = B_0 + B_\infty p + \sum_{i=1}^r \frac{B_i p}{p + \sigma_i} \quad (4.2)$$

mit $B_0 \geq 0$, $B \geq 0$, $B_i > 0$, $\sigma_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Schaltungen schließlich, die nur aus ohmschen Widerständen und Kapazitäten bestehen, lassen sich durch die Zweipolfunktion

$$Z_{RC}(p) = D_0 + \frac{D_\infty}{p} + \sum_{i=1}^r \frac{D_i}{p + \sigma_i} \quad (4.3)$$

mit $D_0 \geq 0$, $D_\infty \geq 0$, $D_i > 0$, $\sigma_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, r$

darstellen.

Soll eine gegebene Ortskurvenvorschrift $Z_o(\omega) = X_o(\omega) + jY_o(\omega)$ durch eine Reaktanzzweipolfunktion nach Gl. (4.1) mit $p = j\omega$ angenähert werden, so sind zunächst vier Fälle zu unterscheiden, wie sie in Tabelle 4.1 dargestellt sind.

Fall	Bedingung	Grad der Zweipolfunktion	Bemerkung
1	$A_0 \neq 0, A_\infty \neq 0$	$2r+2$	Pol in $p=0$, Pol in $p=\infty$
2	$A_0 = 0, A_\infty \neq 0$	$2r+1$	Nullstelle in $p=0$, Pol in $p=\infty$
3	$A_0 \neq 0, A_\infty = 0$	$2r+1$	Pol in $p=0$, Nullstelle in $p=\infty$
4	$A_0 = 0, A_\infty = 0$	$2r$	Nullst. in $p=0$, Nullst. in $p=\infty$

Tabelle 4.1: Fallunterscheidungen zu Gl. (4.1)

Für Fall 1 läßt sich dann eine parametrische Darstellung $Z_{LC}(j\omega, \underline{x})$ angeben mit der Zuordnung

$$\begin{aligned}
 A_0 &= x_1^2, & A_\infty &= x_2^2, \\
 A_1 &= x_3^2, & \omega_1 &= x_4, \\
 A_2 &= x_5^2, & \omega_2 &= x_6, \\
 &\vdots & & \\
 A_i &= x_{2i+1}^2, & \omega_i &= x_{2i+2}, \\
 &\vdots & & \\
 A_r &= x_{2r+1}^2, & \omega_r &= x_{2r+2}.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Die Elemente des Parametervektors

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{2r+2})^T$$

sind keinen Einschränkungen unterworfen.

Die partiellen Ableitungen $\partial Z_{LC}(j\omega, \underline{x}) / \partial x_k$, $k = 1, 2, \dots, 2r+2$, sind unter Verwendung der Gl. (4.1) und des Ansatzes nach Gl. (4.4) in einfacher Weise zu bilden. Die Fälle 2, 3 und 4 aus Tabelle 4.1 können durch entsprechenden Ansatz für den Parametervektor $\underline{x}$ berücksichtigt werden.

Bei der Ortskurvenapproximation durch Reaktanzzweipolfunktionen sind folgende Punkte hervorzuheben:

- 1) es gilt stets $\operatorname{Re}\{Z_{LC}(j\omega)\} \equiv 0$;
- 2) es gilt $d[Z_{LC}(j\omega)/j]/d\omega > 0$ für alle ω -Werte, für welche $Z_{LC}(j\omega)/j$ endlich ist;
- 3) im Approximationsintervall können Pole $p_k = j\omega_k$ auftreten;
- 4) für bestimmte Anwendungen ist es möglich, die Lage der Pole von $Z_{LC}(p)$ festzuhalten; dies kann im Ansatz für die Parameter entsprechend Gl. (4.4) berücksichtigt werden;
- 5) für jeden der in Tabelle 4.1 aufgeführten Fälle existiert eine Schaltung, deren Eingangsimpedanz $Z(j\omega)$ die gleiche Klasse von Zweipolfunktionen beschreibt wie der parametrische Ansatz entsprechend Gl. (4.1), auch wenn bei der Schaltung der Parametervektor durch die positiven Bauelemente definiert ist.

Die Ergebnisse der für die Reaktanzzweipolfunktion $Z_{LC}(p)$ durchgeführten Überlegungen lassen sich in analoger Weise für die Funktionen $Z_{RL}(p)$ nach Gl. (4.2) und $Z_{RC}(p)$ nach Gl. (4.3) angeben.

4.2 Allgemeine Zweipolfunktionen in parametrischer Darstellung

Jede Zweipolfunktion läßt sich als Summe

$$Z(p) = Z_{LC}(p) + Z_m(p)$$

zweier Zweipolfunktionen darstellen. In der Reaktanzzweipolfunktion $Z_{LC}(p)$ sind alle Pole von $Z(p)$ auf der imaginären Achse einschließlich 0 und ∞ enthalten, während $Z_m(p)$ nur Pole $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ mit negativem Realteil $\sigma_i < 0$ besitzt. Eine parametrische Darstellung von $Z_{LC}(p)$ wurde in Abschnitt 4.1 behandelt.

A. FETTWEIS [5] gibt eine Möglichkeit der parametrischen Darstellung von $Z_m(p)$ an, wobei allerdings nur einfache Pole in der linken p -Halbebene zugelassen werden. Ausgangspunkt ist die Partialbruchdarstellung

$$Z_m(p) = B_0 + \sum_{i=1}^N \frac{B_i}{p - p_i}, \quad (4.5)$$

wobei B_0 reelle Werte, B_i und p_i komplexe Werte annehmen können. Tritt ein komplexer Pol $p_i = \sigma_i + j\omega_i$, $\sigma_i < 0$ auf, so muß auch der Pol $p_r = \sigma_i - j\omega_i$ in der Summe enthalten sein. Die Werte B_i , $i = 0, 1, \dots, N$ hängen ab von einem frei wählbaren, reellen Polynom

$$P(p) = a_N p^N + a_{N-1} p^{N-1} + \dots + a_1 p + a_0; \quad (4.6)$$

es gilt $B_0 = a_N^2$,

$$B_i = \frac{-P(p_i)P(-p_i)}{p_i \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^N (p_k^2 - p_i^2)}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.7)$$

Parameter für eine Optimierung sind die Koeffizienten des Polynoms $P(p)$ Gl. (4.6), nämlich a_k , $k = 0, 1, \dots, N$, die keinen Einschränkungen unterworfen sind, sowie die Pole p_i in Gl. (4.5), bei denen jedoch sichergestellt sein muß, daß sie nicht mehrfach auftreten und $\operatorname{Re}\{p_i\} < 0$ gilt. Für eine Zweipolfunktion $Z_m(p)$ stehen also $2N+1$ Parameter zur Verfügung.

Versucht man, eine Ortskurvenvorschrift $Z_o(\omega) = X_o(\omega) + jY_o(\omega)$ durch einen Ansatz für Zweipolfunktionen nach dem Vorschlag von FETTWEIS anzunähern, so sind folgende Punkte zu beachten.

Legt man für die approximierende Funktion $Z(j\omega)$ den Grad N fest, so ist zunächst zu entscheiden, wie viele Pole von $Z(p)$ auf der imaginären Achse liegen sollen; dies bedeutet eine Aufteilung

$$Z(p) = Z_{LC}(p) + Z_m(p).$$

Für praktische Anwendungen ist diese Aufteilung allerdings nicht notwendig, da die Reaktanzzweipolfunktion $Z_{LC}(p)$ ausschließlich unter Verwendung von verlustlosen Energiespeichern realisiert werden müßte. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß alle realen Bauelemente Verluste aufweisen, kann $Z(p) = Z_m(p)$ gesetzt werden, d.h. $Z_m(p)$ besitzt den gewählten Grad N .

$N+1$ Elemente des Parametervektors

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{2N+1})^T$$

werden durch den Ansatz des Polynoms $P(p)$ nach Gl. (4.6) definiert:

$$P(p) = x_{N+1}p^N + x_Np^{N-1} + \dots + x_2p + x_1.$$

Die restlichen N Parameter dienen zur Beschreibung der N Pole von $Z(p)$. Eine Möglichkeit der Zuordnung zwischen Parametern und Polen

besteht darin, die Anzahl der reellen Pole sowie der komplexen Polpaare festzulegen. Sind NR reelle Pole σ_i , $i = 1, 2, \dots$, NR vorhanden, so wird bei dem Ansatz

$$\sigma_1 = -x_1^2 - \varepsilon,$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 - x_2^2 - \varepsilon,$$

$$\vdots$$

$$\sigma_{NR} = \sigma_{NR-1} - x_{NR}^2 - \varepsilon$$

garantiert, daß sich die reellen Pole in der linken p-Halbebene befinden und mindestens den Abstand ε voneinander sowie von der imaginären Achse haben, wie es in Bild 4.1 dargestellt ist. Mehrfache Pole können also nicht auftreten. Die Größe $\varepsilon > 0$ ist abhängig von der Zahlendarstellung des Rechners, der bei der numerischen Lösung des Problems verwendet wird, als Konstante vorzugeben.

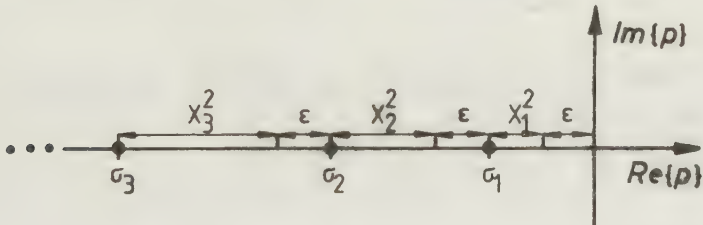


Bild 4.1: Zusammenhang zwischen negativ reellen Polen σ_i und Parametern x_i

Komplexe Pole können durch

$$p_i = -x_i^2 - \varepsilon + j(x_{i+1}^2 + \varepsilon),$$

$$p_{i+1} = -x_i^2 - \varepsilon - j(x_{i+1}^2 + \varepsilon)$$

dargestellt werden, wobei sichergestellt ist, daß sie sich in der linken p-Halbebene befinden und nicht reell sind. Nicht garantiert werden kann bei diesem Ansatz allerdings, daß zwei Polpaare gleich sind.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, jeweils zwei Terme der Summe in Gl. (4.5) zusammenzufassen; falls N ungerade ist, muß ein reeller Pol gesondert betrachtet werden. Der Nenner eines zusammengefaßten Terms kann als reelles Polynom vom Grade Zwei angesetzt werden:

$$p^2 + (x_i^2 + \varepsilon)p + (x_{i+1}^2 + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0;$$

hiermit wird garantiert, daß sich die Pole innerhalb der linken p-Halbebene befinden. Reelle und konjugiert komplexe Pole müssen nicht unterschieden werden, jedoch können mehrfache Pole auftreten.

Bei den aufgeführten Ansätzen sind die Elemente x_i , $i = 1, 2, \dots$ $\dots$, $2N + 1$ keinen Einschränkungen unterworfen.

U. FORSTER und R. UNBEHAUEN [7] schlagen eine andere parametrische Darstellung für Zweipolfunktionen vor, die wesentliche Vorteile gegenüber der Darstellung nach [5] für die Verwendung bei dem Problem der Ortskurvenapproximation besitzt. Unter Verwendung der Abkürzungen

$$D = \prod_{i=1}^s (p^2 + \Omega_i^2),$$

$$D_i = D / (p^2 + \Omega_i^2),$$

$$D_{ik} = D_i / (p^2 + \Omega_k^2)$$

$$\text{und} \quad s = \begin{cases} N/2 & \text{für } N \text{ gerade,} \\ (N+1)/2 & \text{für } N \text{ ungerade,} \end{cases}$$

wobei N den Grad der Zweipolfunktion $Z(p)$ darstellt, gilt

$$\begin{aligned}
 Z(p) = & \frac{d^2 D + \sum_{i=1}^s D_i [(a_i^2 + b_i^2) p + b_i^2 c_i^2 + 2b_i c_i \Omega_i d]}{D + \sum_{i=1}^s p c_i^2 D_i} + \\
 & + \frac{\sum_{i=1}^{s-1} \sum_{k=i+1}^s D_{ik} \{ [(a_i c_k - a_k c_i)^2 + b_i^2 c_k^2 + b_k^2 c_i^2] p^2 + 2b_i b_k c_i c_k \Omega_i \Omega_k \}}{D + \sum_{i=1}^s p c_i^2 D_i}
 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ist N ungerade, so gilt $b_s = \Omega_s = 0$. Parameter sind $d, a_i, c_i, i = 1, 2, \dots, s$ und $b_k, \Omega_k, k = 1, 2, \dots, s$ (N gerade) bzw. $k = 1, 2, \dots, s-1$ (N ungerade). Diese Parameter sind keinen Einschränkungen unterworfen, die Anzahl der Parameter beträgt auch hier $2N+1$ für eine Zweipolfunktion vom Grade N .

Mit dem Ansatz nach Gl. (4.8) ist jede Zweipolfunktion $Z(p)$ darstellbar, die für $p \rightarrow \infty$ endlich bleibt. Die Einschränkung, daß $Z(p)$ keinen Pol in $p = \infty$ besitzen darf, ist für praktische Anwendungsfälle unbedeutend. Wird in Sonderfällen verlangt, daß $Z(p) \rightarrow \infty$ für $p \rightarrow \infty$, so ist ein Ansatz

$$Z(p) = Lp + Z_p(p)$$

mit $L > 0$ möglich, wobei für $Z_p(p)$ die Zweipolfunktion nach Gl. (4.8) zu verwenden ist. Für sehr große p gilt dann näherungsweise

$$Z(p) \approx Lp + d^2.$$

Soll eine Reaktanzzweipolfunktion $Z_{LC}(p)$, welche keinen Pol in $p = \infty$ besitzt, angenähert werden, so ist beim Ansatz nach Gl. (4.8) $d = b_i = c_i = 0, i = 1, 2, \dots, s$ zu setzen. Dann stehen wie

bei Gl. (4.1) N Parameter zur Verfügung, nämlich a_i und Ω_i ,
 $i = 1, 2, \dots, N/2$ für N gerade bzw. a_i , $i = 1, 2, \dots, (N+1)/2$
 und Ω_i , $i = 1, 2, \dots, (N+1)/2 - 1$ für N ungerade.

In Kapitel 2 wurde dargelegt, wie eine Ortskurvenvorschrift
 $Z_o(\omega) = X_o(\omega) + jY_o(\omega)$ durch eine Zweipolfunktion $Z(p)$ mit $p = j\omega$
 in einem Frequenzbereich durch Veränderung des Parametervektors $\underline{x}$
 angenähert werden kann. Dort wurde die Eingangsimpedanz $Z(j\omega, \underline{x})$
 einer Schaltung betrachtet, wobei der Parametervektor $\underline{x}$ abhängig
 war von den Bauelementewerten. Bei Verwendung der parametrischen
 Darstellung einer Zweipolfunktion vom Grade N nach Gl. (4.8) ist
 zunächst der Parametervektor $\underline{x}$ zu definieren. Der Ansatz

$$\underline{x} = (d, a_1, c_1, b_1, \Omega_1, a_2, c_2, b_2, \Omega_2, \dots, a_s, c_s, b_s, \Omega_s)^T$$

für N gerade, $s = N/2$ und

$$\underline{x} = (d, a_1, c_1, b_1, \Omega_1, \dots, a_{s-1}, c_{s-1}, b_{s-1}, \Omega_{s-1}, a_s, c_s)^T$$

für N ungerade, $s = (N+1)/2$ bietet den Vorteil, daß bei einer Grad-
 erhöhung um Eins nur zwei weitere Elemente zum Parametervektor hin-
 zuzufügen sind. Die Dimension des Parametervektors beträgt jeweils
 $2N+1$.

Um günstige Optimierverfahren, wie sie in Kapitel 2 angegeben sind,
 verwenden zu können, ist es erforderlich, neben der Berechnung von
 $Z(j\omega, \underline{x}) = X(\omega, \underline{x}) + jY(\omega, \underline{x})$ für jeden betrachteten Frequenzpunkt
 auch die partiellen Ableitungen $\partial X(\omega, \underline{x}) / \partial x_k$ und $\partial Y(\omega, \underline{x}) / \partial x_k$ nach
 allen Parametern x_k zu bestimmen. Mit diesen Werten und nach Defi-
 nition eines Fehlers kann dann die Jacobi-Matrix Gl. (2.4) angege-
 ben werden. Für die Verwendung der Zweipolfunktion nach Gl. (4.8)
 hat sich folgendes Verfahren bewährt.

Unter Verwendung der Abkürzungen, wie sie bei Gl. (4.8) angegeben sind, wird für $p = j\omega$ definiert

$$A(\omega) = d^2 D(\omega) + \sum_{i=1}^s D_i(\omega) [b_i^2 c_i^2 + 2b_i c_i \Omega_i d] + \\ + \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{k=i+1}^s D_{ik}(\omega) 2b_i b_k c_i c_k \Omega_i \Omega_k - \omega^2 [(a_i c_k - a_k c_i)^2 + b_i^2 c_k^2 + b_k^2 c_i^2] ,$$

$$B(\omega) = \omega \sum_{i=1}^s D_i(\omega) (a_i^2 + b_i^2) ,$$

$$C(\omega) = D(\omega) ,$$

$$E(\omega) = \omega \sum_{i=1}^s c_i^2 D_i(\omega) .$$

Dann gilt

$$Z(j\omega) = \frac{A(\omega) + jB(\omega)}{C(\omega) + jE(\omega)} = X(\omega) + jY(\omega)$$

und

$$\frac{\partial Z(j\omega)}{\partial x_k} = \frac{\partial X(\omega)}{\partial x_k} + j \frac{\partial Y(\omega)}{\partial x_k} = \\ = Z(j\omega) \cdot \left[\frac{\frac{\partial A(\omega)}{\partial x_k} + j \frac{\partial B(\omega)}{\partial x_k}}{A(\omega) + jB(\omega)} - \frac{\frac{\partial C(\omega)}{\partial x_k} + j \frac{\partial E(\omega)}{\partial x_k}}{C(\omega) + jE(\omega)} \right] .$$

Nun sind die partiellen Ableitungen von $A(\omega)$, $B(\omega)$, $C(\omega)$ und $E(\omega)$ nach dem Parameter x_k zu bilden.

Mit der Schreibweise für die Parameter, wie sie in Gl. (4.8) angegeben ist und mit der zusätzlichen Abkürzung

$$D_{ikr}(\omega) = D_{ik}(\omega) / (\Omega_r^2 - \omega^2) = \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq i, k, r}}^s (\Omega_t^2 - \omega^2)$$

gilt für $k = 1, 2, \dots, s$

$$\frac{\partial A(\omega)}{\partial d} = 2[dD(\omega) + \sum_{i=1}^s D_i(\omega) b_i c_i \Omega_i],$$

$$\frac{\partial B(\omega)}{\partial d} = \frac{\partial C(\omega)}{\partial d} = \frac{\partial E(\omega)}{\partial d} = 0,$$

$$\frac{\partial A(\omega)}{\partial a_k} = -2\omega^2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s c_i D_{ik}(\omega) [a_k c_i - a_i c_k],$$

$$\frac{\partial B(\omega)}{\partial a_k} = 2\omega a_k D_k(\omega),$$

$$\frac{\partial C(\omega)}{\partial a_k} = \frac{\partial E(\omega)}{\partial a_k} = 0,$$

$$\frac{\partial A(\omega)}{\partial b_k} = 2c_k [b_k c_k + \Omega_k d] D_k(\omega) + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s c_i D_{ik}(\omega) [b_i c_k \Omega_i \Omega_k - \omega^2 b_k c_i],$$

$$\frac{\partial B(\omega)}{\partial b_k} = 2\omega b_k D_k(\omega),$$

$$\frac{\partial C(\omega)}{\partial b_k} = \frac{\partial E(\omega)}{\partial b_k} = 0,$$

$$\frac{\partial A(\omega)}{\partial c_k} = 2b_k [b_k c_k + \Omega_k d] D_k(\omega) +$$

$$+ 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s D_{ik}(\omega) \{ \omega^2 [(a_k c_i - a_i c_k) a_i - c_k b_i^2] - b_k b_i c_i \Omega_i \Omega_k \},$$

$$\frac{\partial B(\omega)}{\partial c_k} = \frac{\partial C(\omega)}{\partial c_k} = 0,$$

$$\frac{\partial E(\omega)}{\partial c_k} = 2\omega c_k D_k(\omega),$$

$$\frac{\partial A(\omega)}{\partial \Omega_k} = 2d[\Omega_k + b_k c_k] D_k(\omega) + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \{ D_{ik}(\omega) [b_i c_i \Omega_i (\Omega_k d + b_k c_k) +$$

$$+ \Omega_k b_i^2 c_i^2] + \sum_{\substack{r=i+1 \\ r \neq k}}^s [\Omega_k D_{ikr}(\omega) (2b_r b_i c_r c_i \Omega_r \Omega_i -$$

$$- \omega^2 (b_r^2 c_i^2 + b_i^2 c_r^2 + (a_r c_i - a_i c_r)^2)] \},$$

$$\frac{\partial B(\omega)}{\partial \Omega_k} = 2\Omega_k \omega \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s D_{ik}(\omega) [a_i^2 + b_i^2],$$

$$\frac{\partial C(\omega)}{\partial \Omega_k} = 2\omega c_k D_k(\omega),$$

$$\frac{\partial E(\omega)}{\partial \Omega_k} = 2\Omega_k \omega \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s c_i^2 D_{ik}(\omega).$$

Mit Hilfe der angegebenen Gleichungen, die sich für Zweipolfunktionen vom Grade $N \leq 6$ noch vereinfachen lassen, können für jeden Frequenzwert ω aus dem Approximationsintervall die Funktionswerte $Z(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$ sowie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial Z(j\omega)}{\partial x_k} = \frac{\partial X(\omega)}{\partial x_k} + j \frac{\partial Y(\omega)}{\partial x_k}$$

nach allen Parametern x_k , $k = 1, 2, \dots, 2N+1$ berechnet werden.

Waren bei der Ortskurvenapproximation durch Schaltungsoptimierung zwei Probleme zu beachten, nämlich das Auffinden einer geeigneten Schaltungsstruktur sowie die Angabe von Anfangswerten für die Bauelemente, so sind bei der Approximation durch Zweipolfunktionen in parametrischer Darstellung bei vorgegebenem Grad nur die Anfangswerte für die Parameter anzugeben.

Liegt eine Zweipolfunktion $Z(p) = P_1(p)/P_2(p)$ vor, die für $p = j\omega$ als Annäherung für die Ortskurvenapproximation betrachtet werden kann, so ist es möglich, aus dieser Startfunktion einen Parametervektor $\underline{x}$ für die parametrische Darstellung von $Z(p)$ entsprechend Gl. (4.8) zu berechnen. Für die Startfunktion

$$Z(p) = \frac{e_1^2 p^2 + e_2^2 p + e_3^2}{p^2 + e_4^2 p + e_5^2}, \quad e_4 \neq 0 \quad (4.9)$$

lautet der Parametervektor

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} d \\ a_1 \\ c_1 \\ b_1 \\ \Omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \sqrt{e_2^2 - [(e_3 - e_5 e_1)/e_4]^2} \\ e_4 \\ (e_3 - e_5 e_1)/e_4 \\ e_5 \end{bmatrix}$$

und die Zweipolfunktion in parametrischer Darstellung

$$Z(p) = \frac{d^2 p^2 + (a_1^2 + b_1^2)p + (b_1 c_1 + \Omega_1 d)^2}{p^2 + c_1^2 p + \Omega_1^2}.$$

Gilt in Gl. (4.9) $e_4 = 0$, $e_5 \neq 0$, so muß die Beziehung $e_3^2 = e_1^2 e_5^2$ bestehen, denn dann liegt ein konjugiert komplexes Polpaar auf der imaginären Achse vor, d.h. es ist möglich, eine Reaktanzreduktion durchzuführen, die Restzweipolfunktion muß konstant sein ($e_1 \neq 0$) oder verschwinden ($e_1 = 0$). Für $e_4 = 0$ kann der Parametervektor nicht eindeutig angegeben werden, da zur Bestimmung von a_1 und b_1 nur die Bedingung $a_1^2 + b_1^2 = e_2^2$ vorliegt. Eine Möglichkeit ist

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} d \\ a_1 \\ c_1 \\ b_1 \\ \Omega_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2/\sqrt{2} \\ 0 \\ e_2/\sqrt{2} \\ e_5 \end{bmatrix}.$$

Die Aufgabe, aus einer Startlösung $Z(p)$, welche nicht in der Form von Gl. (4.8) vorliegt, den Parametervektor $\underline{x}$ für die parametrische Darstellung zu gewinnen, erfordert die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems. Ist der Grad der Startlösung größer als Zwei, so ist empfehlenswert, die Startlösung als Vorschrift zu betrachten und mit Hilfe eines Optimierverfahrens die Startlösung durch eine Zweipolfunktion nach Gl. (4.8) gleichen Grades anzunähern. Ist die Startlösung eine Zweipolfunktion, die für $p \rightarrow \infty$ endlich bleibt, so muß (im Rahmen der Rechengenauigkeit) eine vollständige Annäherung gelingen.

Es bleibt zu klären, wie man zu einer Startlösung $Z(p)$ gelangt. Hierfür stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung:

- 1) $Z(p)$ wird ermittelt durch eine Schaltungsoptimierung, wie sie in Kapitel 2 beschrieben ist. Dieses Verfahren ist erfolgversprechend, falls neben der eigentlichen Ortskurvenvorschrift weitere Informationen, welche auf eine günstige Schaltungsstruktur hinweisen, vorliegen. Sieht man von einem Pol in $p = \infty$ ab, der gesondert zu behandeln ist, so können alle Zweipolfunktionen vom Grade N durch einen Ansatz nach Gl. (4.8) dargestellt werden. Bei der Schaltungsoptimierung dagegen, bei der eine feste Struktur betrachtet wird, ist durch diese Schaltungsstruktur eine Klasse von Zweipolfunktionen definiert, die nicht alle möglichen Zweipolfunktionen vom Grade N umfaßt. Ausgehend von einer Startlösung, die mit Schaltungsoptimierung im Rahmen einer betrachteten Struktur nicht mehr verbessert werden kann, ist es möglich, mit der Approximation unter Verwendung von Gl. (4.8) eine bessere Lösung zu finden, sofern die Startlösung nicht bereits optimal war.
- 2) $Z(p)$ wird ermittelt durch eine zweistufige Approximation entsprechend Kapitel 3.
- 3) $Z(p)$ wird ermittelt unter Verwendung eines Interpolationsverfahrens, wie es in Kapitel 5 angegeben wird.
- 4) Es ist möglich, direkt einen Ansatz nach Gl. (4.8) mit niederem Grad ($N \leq 3$) als Startlösung zu verwenden, wobei der Parametervektor $\underline{x}$ frei gewählt wird. Falls nach Durchführung einer Optimierung das Ergebnis nicht befriedigt, ist der Grad der betrachteten Zweipolfunktion zu erhöhen, was bei der beschriebenen Dar-

stellung für den Parametervektor $\underline{x}$ bedeutet, daß die Dimension von $\underline{x}$ von $2N+1$ auf $2(N+1)+1$ zu erhöhen ist. Es sind dabei zwei neue Parameter an den Vektor anzufügen, wobei die Parameter, die für den niedrigeren Grad gefunden wurden, das sind die ersten $2N+1$ Elemente des Parametervektors, nicht geändert werden.

Liegt das Ergebnis einer nicht rationalen Approximation vor, wie sie in Kapitel 3 beschrieben ist, so kann statt einer rationalen Approximation eine Annäherung durch eine Zweipolfunktion nach Gl. (4.8) vorgenommen werden, wobei zunächst neben Frequenzpunkten aus dem Approximationsintervall weitere Frequenzpunkte als Stützpunkte zu wählen sind. Dies bedeutet, daß die Information, die über den näherungsweisen Verlauf von Realteil und Imaginärteil außerhalb des Approximationsintervalls durch die nicht rationale Approximation vorliegt, mit verwendet werden kann zum Auffinden eines Startvektors $\underline{x}$ für die eigentliche Approximation, bei der dann nur noch Frequenzen aus dem Approximationsintervall berücksichtigt werden. Zwar hat das hier angegebene Verfahren den Nachteil, daß gegenüber einer normalen rationalen Approximation mehr Rechenaufwand nötig ist, dieser Nachteil wird jedoch dadurch aufgehoben, daß das Ergebnis stets eine Zweipolfunktion darstellt, auch bei schlechter Annäherung für Frequenzen, bei denen die Werte der Realteilmfunktion sehr klein werden.

5 WEITERE APPROXIMATIONSVERFAHREN

In Kapitel 2 wurden Schaltungsstrukturen bei der Approximation betrachtet, wie sie beim BRUNE-Verfahren zur Realisierung von Zweipolfunktionen $Z(p)$ entstehen. Prinzipiell können auch andere Zweipolsyntheseverfahren verwendet werden, Schaltungen nach dem BRUNE-Verfahren zeichnen sich jedoch durch die geringe Anzahl an Schaltelementen aus, nämlich $2N+1$, wobei N den Grad der zu realisierenden Zweipolfunktion darstellt, und durch die Kettenstruktur. Bei dem Zweipolsyntheseverfahren nach BOTT-DUFFIN [1] werden

$$8 \cdot 2^{N/2} - 7 \quad \text{für } N \text{ gerade}$$

$$\text{und} \quad 10 \cdot 2^{(N-1)/2} - 7 \quad \text{für } N \text{ ungerade}$$

Schaltelemente benötigt [4].

Neben dem Problem der Approximation einer komplexwertigen Vorschrift $Z_0(\omega) = X_0(\omega) + jY_0(\omega)$ können auch reellwertige Vorschriften bestehen, die durch den Realteil, den Imaginärteil, die Phase oder den Betrag einer Zweipolfunktion $Z(j\omega)$ anzunähern sind. Vorgehensweisen hierzu sowie ein Interpolationsalgorithmus werden im folgenden beschrieben.

Schließlich wird ein Programmkonzept angegeben, mit dessen Hilfe das Problem der Zweipolapproximation in interaktiver Weise gelöst werden kann.

5.1 Approximation von Betrag oder Realteil

Bei dem Problem der Schaltungsoptimierung (Kapitel 2) und auch bei der Behandlung von Zweipolfunktionen in parametrischer Darstellung (Kapitel 4) wurde angegeben, wie die betrachtete Funktion

$$Z(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$$

abhängig von der Frequenz ω und Parametern x_k , $k = 1, 2, \dots, NX$ zu bestimmen ist. Ferner wurde dargestellt, wie die partiellen Ableitungen $\partial X(\omega)/\partial x_k$ und $\partial Y(\omega)/\partial x_k$ zu berechnen sind.

Diese Algorithmen können auch dazu verwendet werden, nicht komplexwertige Vorschriften anzunähern. Im folgenden wird gezeigt, wie durch Modifikation des frequenzabhängigen Fehlers $f(\omega)$ Vorschriften bezüglich Betrag oder Realteil angenähert werden können.

Ist eine Betragsvorschrift $B_0(\omega)$ in einem Frequenzintervall vorgegeben, so kann als Fehlerfunktion

$$f(\omega) = \sqrt{X^2(\omega) + Y^2(\omega)} - B_0(\omega)$$

gewählt werden mit

$$\frac{\partial f(\omega)}{\partial x_k} = [X^2(\omega) + Y^2(\omega)]^{-1/2} \left[X(\omega) \frac{\partial X(\omega)}{\partial x_k} + Y(\omega) \frac{\partial Y(\omega)}{\partial x_k} \right].$$

Für eine Realteilvorschrift $X_0(\omega)$ kann

$$f(\omega) = X(\omega) - X_0(\omega)$$

gewählt werden mit

$$\frac{\partial f(\omega)}{\partial x_k} = \frac{\partial X(\omega)}{\partial x_k}.$$

Phasen- und Imaginärteilvervorschriften können in entsprechender Weise behandelt werden, wobei wesentlich ist, daß realisierte Programme Verwendung finden, welche $Z(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$, $\partial X(\omega)/\partial x_k$ und $\partial Y(\omega)/\partial x_k$, $k = 1, 2, \dots, NX$ berechnen, eine Gewichtsfunktion bezüglich des frequenzabhängigen Fehlers berücksichtigen und Schrankenoptimierungen durchführen, um gleichmäßige Annäherungen zu erhalten. Nur die Definition des Fehlers ist dem zu behandelnden Problem anzupassen.

Für die Approximation des Realteils $X(\omega)$ kann ein weiteres Verfahren angegeben werden. Ist $Z(p)$ eine Zweipolfunktion vom Grade n , welche keine Pole auf der imaginären Achse besitzt, so stellt der gerade Anteil

$$G(p) = \frac{1}{2} [Z(p) + Z(-p)] \quad (5.1)$$

für $p = j\omega$ den Realteil der Funktion $Z(j\omega)$ dar [20]; hierbei ist für $G(p)$ folgender Ansatz möglich [7]:

$$G(p) = \frac{g(p) \cdot g(-p)}{h(p) \cdot h(-p)} \quad (5.2)$$

mit dem Hurwitzpolynom

$$h(p) = \prod_{i=1}^{n/2} (p^2 + a_i^2 p + b_i^2) \quad \text{für } n \text{ gerade}$$

$$\text{und} \quad h(p) = (p + c^2)^{(n-1)/2} \prod_{i=1}^{(n-1)/2} (p^2 + a_i^2 p + b_i^2) \quad \text{für } n \text{ ungerade} \quad (5.3)$$

mit $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$, $c \neq 0$

und dem reellen Polynom

$$g(p) = g_0 + g_1 p + \dots + g_m p^m$$

mit $0 \leq m \leq n$.

Werden die Koeffizienten g_k , $k = 1, 2, \dots, m$ sowie a_i , b_i , $i = 1, 2, \dots, n/2$ bzw. $(n-1)/2$ und c (für n ungerade) als Parameter aufgefaßt, so kann für $p = j\omega$ mit dem Ansatz nach Gl. (5.2) eine Realteilapproximation durchgeführt werden.

Mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} c^2 &= x_c^2 + \varepsilon, \\ a_i^2 &= x_{ai}^2 + 2\varepsilon, \\ b_i^2 &= x_{bi}^2 + \varepsilon x_{ai}^2 + \varepsilon^2, \\ g_k &= x_k \end{aligned} \quad (5.4)$$

wird garantiert, daß für $\varepsilon > 0$ die Bedingungen $a_i \neq 0$, $b_i \neq 0$, $c \neq 0$ erfüllt sind, die neuen Parameter x_c , x_{ai} , x_{bi} , $i = 1, 2, \dots, n/2$ bzw. $(n-1)/2$ und x_k , $k = 1, 2, \dots, m$ sind keinen Einschränkungen unterworfen.

Aus den Gleichungen (5.1) bis (5.3) ist ersichtlich, daß Nullstellen von $h(p)$ Pole der Zweipolfunktion $Z(p)$ darstellen. Bei Verwendung der Gl. (5.4) für die Festlegung der Parameter wird sichergestellt, daß alle Pole von $Z(p)$ mindestens den Abstand ε von der imaginären Achse besitzen, denn aus

$$p + c^2 = 0$$

$$\text{folgt } p_0 = -x_c^2 - \varepsilon$$

$$\text{und aus } p^2 + a_i^2 p + b_i^2 = 0$$

$$\text{folgt } p_{1,2} = -\varepsilon - \frac{x_{ai}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{x_{ai}^2}{4} - x_{bi}^2}$$

Wesentlich bei dem Ansatz nach Gl. (5.3) für das Polynom $h(p)$ ist, daß nur der Grad n der approximierenden Zweipolfunktion $Z(p)$ festzulegen ist, eine Aufteilung der n Nullstellen von $h(p)$ in n_1 reelle und n_2 konjugiert komplexe Nullstellen ist hierbei nicht notwendig (ist n ungerade, so ist stets eine reelle Nullstelle im Ansatz nach Gl. (5.3) enthalten). Durch den Ansatz für die Parameter nach Gl. (5.4) wird der Mindestabstand $\epsilon > 0$ sowohl der reellen als auch der konjugiert komplexen Pole der Zweipolfunktion $Z(p)$ von der imaginären Achse gewährleistet. Die Größe $\epsilon > 0$ ist unter Berücksichtigung der Technologie, in der die gefundene Zweipolfunktion schließlich realisiert werden soll, festzulegen.

Für die Bestimmung der Zweipolfunktion $Z(p)$ aus deren geradem Anteil $G(p)$ sind in [20] und [23] verschiedene Algorithmen angegeben.

Zu bemerken ist, daß der Ansatz für den Realteil einer Zweipolfunktion, welche keine Pole auf der imaginären Achse besitzt, entsprechend Gl. (5.2) auch dazu verwendet werden kann, aus dem Ergebnis einer nicht rationalen Approximation, wie sie in Kapitel 3 beschrieben ist, eine Zweipolfunktion zu gewinnen durch Approximation des im gesamten Frequenzbereich $0 \leq \omega \leq \infty$ vorliegenden Verlaufs des Realteils $X(\omega)$. Dann wird auch der Imaginärteil $Y(\omega)$ im Approximationsintervall angenähert, da Realteil und Imaginärteil konjugierte Funktionen sind und der Imaginärteil eindeutig (Polfreiheit auf der imaginären Achse vorausgesetzt) durch den Verlauf des Realteils bestimmt ist. Dieser Zusammenhang wurde bei der nicht rationalen Approximation durch den Ansatz nach Gl. (3.6) berücksichtigt.

5.2 Interpolation

Bei der Approximation einer komplexwertigen Vorschrift durch eine Zweipolfunktion ist sowohl bei direkter Schaltungsoptimierung als auch bei der Approximation durch Zweipolfunktionen, welche durch einen parametrischen Ansatz dargestellt werden, zunächst das Problem zu lösen, eine günstige Schaltungsstruktur einschließlich Bauelementewerte bzw. günstige Startwerte für die Parameter anzugeben. Hier bieten sich Verfahren der Interpolation an, d.h. es wird verlangt, daß die Vorschrift $Z_o(\omega) = X_o(\omega) + jY_o(\omega)$ und das Interpolationsergebnis $Z(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega)$ für eine endliche Anzahl von Frequenzen ω_i , $i = 1, 2, \dots, NP$ übereinstimmen.

Ist die Vorschrift nur in den betrachteten Frequenzpunkten ω_i bekannt und ist $Z(p)$ eine Zweipolfunktion, dann ist die Approximationsaufgabe gelöst; falls die Vorschrift für alle Punkte eines Frequenzintervalls gegeben ist oder für eine größere Anzahl von Frequenzpunkten, so kann die erhaltene Funktion $Z(j\omega)$ daraufhin überprüft werden, ob sie eine ausreichende Annäherung darstellt oder wenigstens als Ausgangsnäherung geeignet ist für eine weitere Approximation, welche keine Interpolation darstellt. Gegebenenfalls ist die Interpolation mit anderen Interpolationspunkten zu wiederholen.

Programmiert wurde ein von NAI TA MING [15] angegebenes Verfahren, das durch sieben Schritte beschrieben werden kann.

1) Nach Auswahl von NP Interpolationsstellen

$$Z_o(\omega_i) = X_o(\omega_i) + jY_o(\omega_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, NP$$

ist eine Reihenfolge der Interpolationspunkte festzulegen, in der sie behandelt werden.

- 2) Durch den ersten Interpolationspunkt wird die komplexe Z_0 -Ebene in verschiedene Gebiete eingeteilt, wie es in Bild 5.1 dargestellt ist.

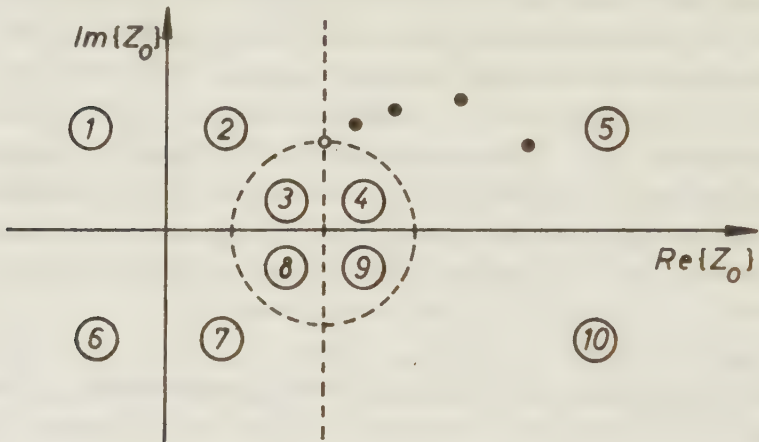


Bild 5.1: Einteilung der Z_0 -Ebene in 10 Gebiete

- aktueller Interpolationspunkt
- weitere Interpolationspunkte

- 3) Es ist ein "symbolischer Ortskurvenverlauf" zu bestimmen, d.h. es ist anzugeben, durch welche Gebiete die gesuchte Funktion $Z(j\omega)$ verlaufen soll. Hierbei sind die vorgegebenen Interpolationspunkte sowie die Bedingung $Z(j\omega) \geq 0$ für $0 \leq \omega \leq \infty$ zu berücksichtigen.
- 4) Es sind NP "Vorwärtstransformationen" durchzuführen, d.h. unter Verwendung der Gleichung

$$Z_0^{(i)}(\omega_k) = \frac{A^{(i)}(\omega_k) - C^{(i)}(\omega_k) Z_0^{(i-1)}(\omega_k)}{-B^{(i)}(\omega_k) + D^{(i)}(\omega_k) Z_0^{(i-1)}(\omega_k)}$$

sind alle noch nicht behandelten Interpolationspunkte $Z_o^{(i-1)}(\omega_k)$, $k = i+1, \dots$, NP von einer Ebene $(i-1)$ auf eine Ebene i zu transformieren. Die Ebene $Z_o^{(0)}$ stellt dabei die Ausgangsebene Z_o dar (Bild 5.1). Die Koeffizienten $A^{(i)}, B^{(i)}, C^{(i)}, D^{(i)}$ sind abhängig vom Interpolationspunkt $Z_o^{(i-1)}(\omega_i)$, von der Frequenz ω_k des zu transformierenden Punktes sowie von der Art der Vorwärtstransformation, die aus acht Möglichkeiten auszuwählen ist. Der "symbolische Ortskurvenverlauf" auf der Ebene i ist zu bestimmen, dies bedeutet, daß die Gebiete, in denen die "symbolische Ortskurve" in der Ebene $(i-1)$ verläuft, in Gebiete der Ebene i zu transformieren sind. Hierzu können Tabellen, die in [15] angegeben sind, verwendet werden.

- 5) Auf der Ebene NP (= Anzahl der Interpolationspunkte) sind keine Interpolationspunkte mehr zu transformieren, es liegen nur noch Gebiete vor, in denen die "symbolische Ortskurve" zu verlaufen hat. Es ist eine Funktion $Z^{(NP)}(p)$ zu wählen, welche für $p = j\omega$ durch diese Gebiete verläuft.

- 6) Es sind NP Rückwärtstransformationen unter Verwendung von

$$Z^{(i-1)}(j\omega) = \frac{A^{(i)}(\omega) + B^{(i)}(\omega)Z^{(i)}(j\omega)}{C^{(i)}(\omega) + D^{(i)}(\omega)Z^{(i)}(j\omega)}$$

durchzuführen, wobei die Koeffizienten $A^{(i)}, B^{(i)}, C^{(i)}, D^{(i)}$ aus den Vorwärtstransformationen bekannt sind. Bei jeder Rücktransformation erhöht sich der Grad von $Z^{(i)}(p)$ um Eins.

- 7) $Z^{(0)}(j\omega) = Z(j\omega)$ stellt für $j\omega = p$ die gesuchte Zweipolfunktion dar.

Einzelheiten des geschilderten Rechenverfahrens sind in [15] dargestellt. Wesentlich erscheint, daß bei NP Interpolationsstellen die erhaltene Zweipolfunktion $Z(p)$ mindestens den Grad NP besitzt, ein höherer Grad ist notwendig, falls auf der Ebene NP keine Konstante gewählt werden kann.

Ein niedrigerer Grad wäre möglich, falls auf einer Ebene $i < NP$ der symbolische Ortskurvenverlauf einschließlich der noch zu behandelnden Interpolationspunkte durch eine Konstante realisiert werden kann. Dies ist jedoch bei Vorgabe von NP Interpolationspunkten sehr unwahrscheinlich. Deshalb wird vorgeschlagen, statt der Interpolationspunkte $Z_0(\omega_i)$ auf der Ebene 0 für jede Frequenz ω_i , $i = 1, 2, \dots, NP$ zulässige Gebiete $G_i(\omega_i)$ vorzuschreiben, wie es in Bild 5.2 dargestellt ist.

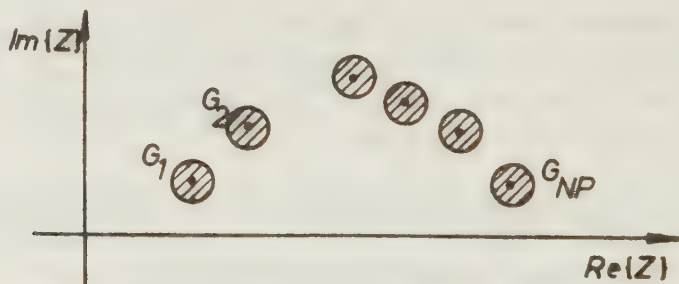


Bild 5.2: Interpolationspunkte und zulässige Gebiete G_i

Diese Gebiete sind bei der Vorwärtstransformation mit zu transformieren, wobei die Vorwärtstransformationen auf der Ebene k abzuberechnen sind, falls eine Konstante K existiert, die als Punkt aufgefaßt Element aller Gebiete $G_i^{(k)}$, $i = k, k+1, \dots, NP$ als auch Element aller Gebiete ist, durch die die symbolische Ortskurve verläuft.

Hierbei können die Gebiete G_i , die in Bild 5.2 als Kreisflächen angenommen wurden, durch jeweils sechs Punkte auf dem Gebietsrand ersetzt werden; diese Punkte sind dann mit zu transformieren, wobei als Frequenz die Frequenz des den Kreismittelpunkt darstellenden Interpolationspunktes zu verwenden ist.

Dieses modifizierte Interpolationsverfahren kann noch dahingehend erweitert werden, daß

- a) viele Punkte der Vorschrift (zumindest mehr, als Interpolationspunkte vorgesehen sind) betrachtet werden;
- b) ein interaktives Programm mit graphischer Ausgabe verwendet wird, wobei für jede Ebene i , d.h. nach jeder Vorwärtstransformation, alle noch nicht behandelten Punkte $Z^{(i)}(\omega_k)$, $k = i+1, i+2, \dots$, NP einschließlich der zulässigen Gebiete $G_k^{(i)}$ dargestellt werden; die Entscheidung, welcher Punkt als nächster bei der Vorwärtstransformation interpoliert werden soll, ist interaktiv zu fällen.

Die Erfahrungen, die mit einem interaktiven Interpolationsprogramm nach [15] gemacht wurden, können in folgenden Punkten zusammengefaßt werden.

- 1) Für mehr als etwa vier Interpolationspunkte ist es schwierig, den "symbolischen Ortskurvenverlauf" bei der Vorwärtstransformation zu verfolgen.
- 2) Ein Algorithmus für eine sinnvolle Bestimmung der Freiheitsgrade bei der Vorwärtstransformation konnte nicht gefunden werden.
- 3) Schwierige Probleme zeichnen sich dadurch aus, daß auf der Ebene NP komplizierte Funktionen $Z^{(NP)}(p)$ als Ausgangsfunktion anzugeben sind. Das Auffinden geeigneter Funktionen $Z^{(NP)}(p)$ stellt

ein weiteres Problem dar.

- 4) Das Interpolationsverfahren ist zum Auffinden von Lösungen vom Grade Zwei oder Drei gut geeignet.
- 5) Gefundene Lösungen sollten grundsätzlich durch andere Approximationsverfahren verbessert werden, d.h. nur als Startlösung dienen für Verfahren, die auch den Verlauf von $Z(j\omega)$ zwischen den Interpolationsstellen berücksichtigen, wobei vorausgesetzt wird, daß die Vorschrift in einem Frequenzintervall besteht, nicht nur in den Punkten, die interpoliert wurden.
- 6) Um die Brauchbarkeit einer Interpolationslösung für eine weitere Approximation entsprechend Punkt 5 schnell entscheiden zu können, ist es günstig, das Ergebnis sowie die Vorschrift graphisch darzustellen.
- 7) Ausgehend von einem graphisch dargestellten Ergebnis kann auch entschieden werden, ob eine oder mehrere der verwendeten Stützstellen verändert oder neu hinzugefügt werden sollen.
- 8) Der Grad der Interpolationslösung ist wesentlich abhängig von der Anzahl der verwendeten Interpolationsstellen. Bei einer graphischen Ausgabe des Ergebnisses und einem interaktiven Programmaufbau kann in einfacher Weise festgestellt werden, wie sich das Interpolationsergebnis ändert, falls ein Interpolationspunkt weniger betrachtet wird. Dies bedeutet normalerweise auch eine Gradreduzierung.

5.3 Eine Programmstruktur zur interaktiven Lösung des Approximationsproblems

Ist eine Vorschrift $Z_o(\omega) = X_o(\omega) + jY_o(\omega)$ in einem Frequenzbereich $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ gegeben, so kann eines der beschriebenen Verfahren zur Approximation der Vorschrift durch eine Zweipolfunktion oder durch die Eingangsimpedanz einer Schaltung verwendet werden.

Bei praktisch auftretenden Problemstellungen besteht die Vorschrift im allgemeinen nicht nur aus der Angabe von $Z_o(\omega)$, vielmehr sind eine Reihe weiterer Forderungen und/oder Informationen bei der Problemlösung zu berücksichtigen. Zunächst ist die Frage zu beantworten, ob eine Zweipolfunktion oder eine Schaltung als Ergebnis gewünscht wird. Nun läßt sich zwar jede Zweipolfunktion unter Verwendung eines Syntheseverfahrens durch eine Schaltung realisieren, doch können nur in Ausnahmefällen Forderungen bezüglich Anzahl, Art und Werte der Bauelemente beim Ansatz der Zweipolfunktion berücksichtigt werden. Bei der Durchführung einer Optimierung sind Startwerte für die Parameter anzugeben. In vielen Fällen, insbesondere bei Schaltungsoptimierungen, können für die Wahl der Parameterstartwerte zusätzliche Informationen, die neben der eigentlichen Vorschrift vorliegen, verwendet werden.

Jedes Ergebnis einer Optimierung ist auf seine Brauchbarkeit hin zu überprüfen. Falls das Ergebnis nicht ausreichend ist, so ist zu untersuchen, ob ungünstige Startwerte vorlagen, ob die Anzahl der Parameter zu gering war oder ob ein anderes Approximationsverfahren eventuell ein besseres Ergebnis verspricht. Wird durch das erhaltene Ergebnis die Vorschrift Übererfüllt, so ist zu prüfen, ob eine Verringerung des Aufwandes, d.h. bei kleinerem Grad der betrachteten Zweipol-

funktion oder bei geringerer Anzahl an Bauelementen ein noch ausreichendes Ergebnis erzielt werden kann.

Es erscheint nicht sinnvoll, für alle hier aufgeworfenen Fragen explizite Entscheidungskriterien zu formulieren, so daß es möglich ist, nach Vorgabe der Vorschrift einen automatisch ablaufenden Algorithmus in Gang zu setzen, der schließlich das gewünschte Ergebnis liefert. Vielmehr ist ein interaktives Vorgehen anzuwenden, wie es schematisch in Bild 5.3 dargestellt ist, d.h. es werden Entscheidungen vom Menschen getroffen, die sich auf das vorliegende spezielle Problem beziehen.

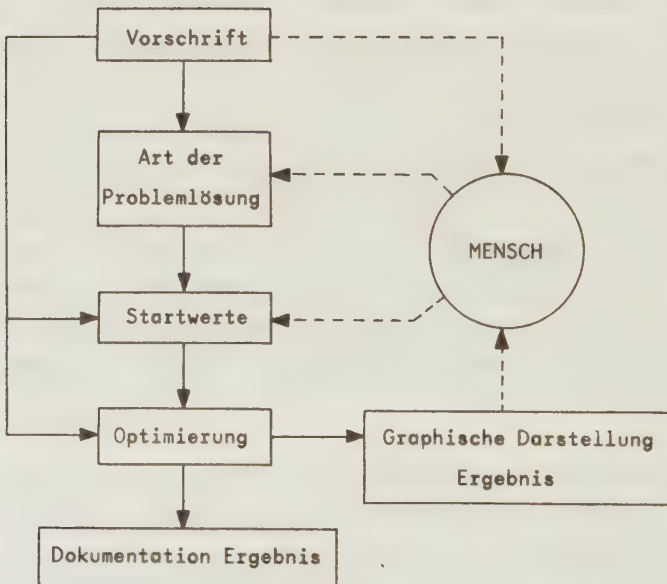


Bild 5.3: Informationsfluß bei der interaktiven Lösung des Approximationsproblems

Dies bedeutet allerdings, daß Daten, die für eine Entscheidung als Grundlage dienen, in einer Form vorliegen müssen, die für die Aufnahme durch den Menschen gut geeignet ist. Statt Tabellen mit Zahlenwerten sind graphische Darstellungen, statt Listen mit Bauelementen sind Schaltbilder vorzusehen.

Ein interaktives Programmkonzept kann auch für die Lösung von Teilaufgaben verwendet werden, wie es in Bild 5.4 für die Schaltungsoptimierung dargestellt ist. Wesentliche Eingriffspunkte für den Menschen sind hier die Festlegung der Schaltungsstruktur sowie die Angabe der Startwerte für die Bauelemente. In einfacher Weise können Bauelemente, welche sehr große oder sehr kleine Werte annehmen, eliminiert werden oder bei nicht ausreichendem Ergebnis neue Bauelemente hinzugefügt werden.

Neben Vorgehensweisen, wie sie in Kapitel 2 beschrieben sind, besteht auch die Möglichkeit, durch Aufsuchen einer Zweipolfunktion $Z(p)$, welche für $p = j\omega$ die Vorschrift annähert, zu einer Schaltungsstruktur einschließlich Bauelementewerten zu gelangen, die als Ausgangspunkt für die Schaltungsoptimierung dient.

Liegt eine approximierende Zweipolfunktion $Z(p)$ vor, so ist diese unter Verwendung eines Syntheseverfahrens zu realisieren. Auch hier liegt eine interaktive Vorgehensweise nahe. Zum einen ist ein Syntheseverfahren auszuwählen, zum anderen liefern einzelne Syntheseverfahren äquivalente Schaltungen, aus denen eine für die Schaltungsoptimierung auszuwählen ist. Welche Schaltung aus einer Klasse äquivalenter Schaltungen als günstig anzusehen ist, ist abhängig von der Problemstellung. Soll die Auswahl automatisch geschehen, so ist eine Bewertungsfunktion aufzustellen, welche

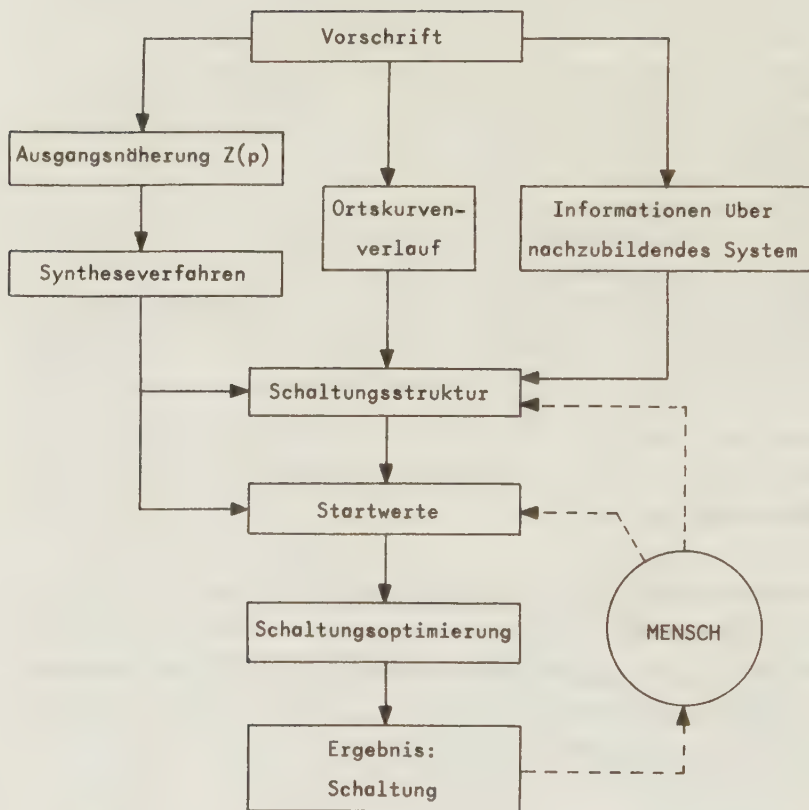


Bild 5.4: Interaktive Schaltungsoptimierung

- Anzahl der Bauelemente,
- Art der Bauelemente,
- Werte der Bauelemente

berücksichtigt, wobei die genannten Kriterien entsprechend dem vorliegenden Problem zu gewichten sind.

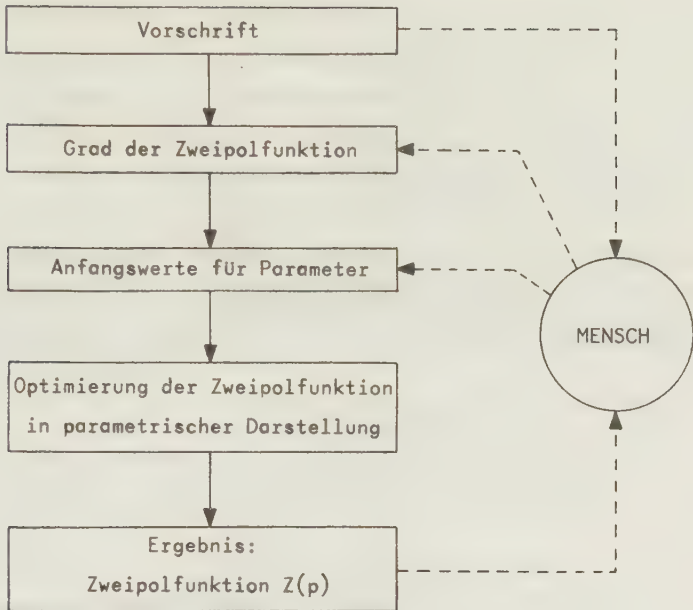


Bild 5.5: Interaktive Approximation einer Zweipolfunktion mit parametrischem Ansatz

Für die Bestimmung einer Ausgangsnäherung $Z(p)$ stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung. In Bild 5.5 ist eine interaktive Vorgehensweise dargestellt, wobei für die Zweipolfunktion $Z(p)$ eine parametrische Darstellung verwendet wird. Es besteht die Möglichkeit, abhängig von der gestellten Aufgabe und vom erhaltenen Ergebnis den Grad der betrachteten Zweipolfunktion zu verändern und verschiedene Startwerte für die Parameter vorzusehen.

Bei einer zweistufigen Approximation entsprechend Kapitel 3 beeinflusst die Auswahl der betrachteten Stützstellen für die nicht ratio-

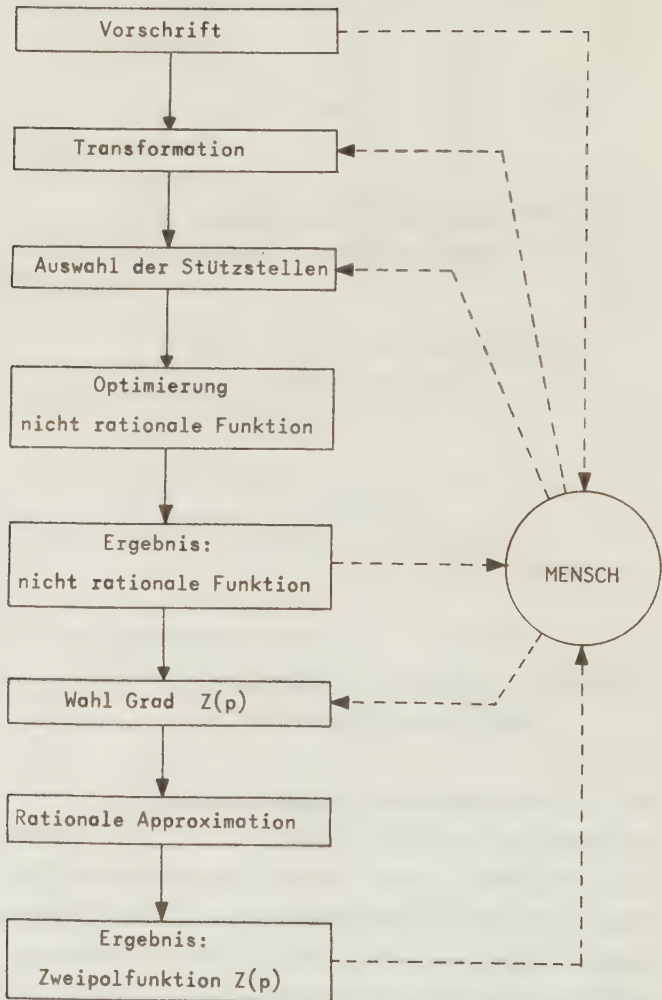


Bild 5.6: Zweistufige Zweipolapproximation unter Verwendung einer nicht rationalen Annäherung

nale Approximation das Ergebnis. Hier ist ein interaktives Vorgehen entsprechend Bild 5.6 zu empfehlen, wobei nach jedem Optimierzyklus Vorschrift, Ergebnis und aktuelle Stützstellen dargestellt werden und aus den Kurvenverläufen in einfacher Weise eine geänderte Stützstellenverteilung angegeben werden kann, falls dies notwendig ist.

Noch wichtiger ist die Auswahl der Stützstellen bei der Interpolation (Bild 5.7). Das Interpolationsergebnis sollte stets mit der Vorschrift verglichen werden, um den Verlauf zwischen den Interpolationsstellen zu überprüfen.

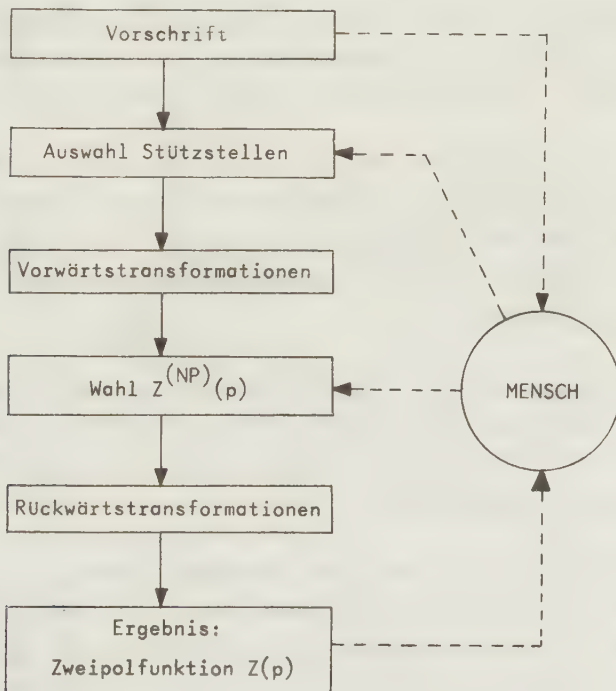


Bild 5.7: Interaktive Interpolation einer Zweipolfunktion

6 BEISPIELE

Die folgenden Beispiele stellen Anwendungen der aufgeführten Verfahren und Vorgehensweisen dar. Es soll gezeigt werden, in welcher vielfältiger Art Probleme der Ortskurvenapproximation gelöst werden können. Alle Rechnungen wurden an einem Rechner HP21MX durchgeführt; ein großer Teil der Bilder wurde mit Hilfe eines von uns am selben Rechner entwickelten Graphiksystems erzeugt [9], wobei insbesondere auf ein Programmpaket zur Darstellung von Ortskurven und anderen Frequenzcharakteristiken [14] zurückgegriffen wurde.

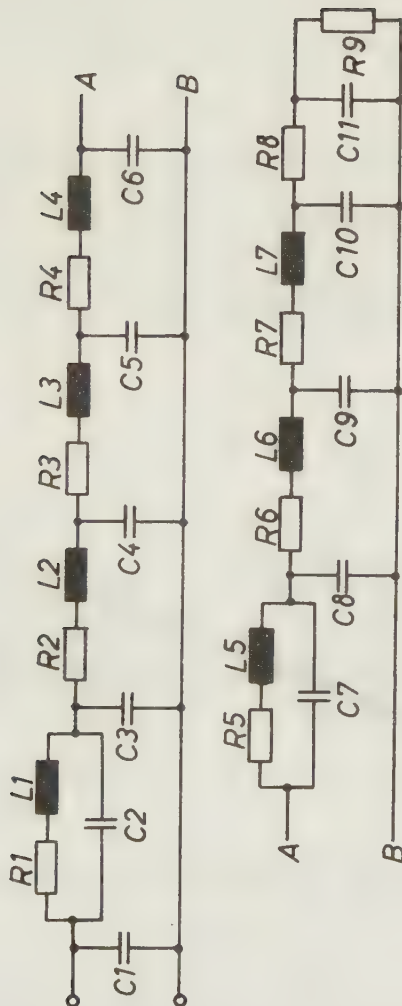
Beispiel 1 behandelt einen einfachen Fall der Schaltungsnachbildung durch direkte Schaltungsapproximation, wobei gezeigt wird, in welcher Weise man zu Struktur und Anfangswerten gelangen kann.

In Beispiel 2, einer Approximation des Wellenwiderstandes einer Leitung, wird für die zu bestimmende RC-Zweipolfunktion ein parametrischer Ansatz gewählt und untersucht, wie die erhaltene Schaltung zu verändern ist, falls der ohmsche Leitungsbelag R' verschiedene Werte annimmt.

Beispiel 3 behandelt eine Dämpfungsapproximation, welche zurückgeführt wird auf die Aufgabe, eine Zweipolfunktion $Z(p)$ so zu bestimmen, daß $|1+Z(j\omega)|$ in einem vorgegebenen Frequenzbereich eine gegebene Vorschrift annähert.

In Beispiel 4 wird eine reine Betragsapproximation durchgeführt, wobei insbesondere auf den wesentlichen Unterschied eingegangen wird, ob die annähernde Funktion rational und reell oder aber rational, reell und positiv sein soll.

In Beispiel 5 wird versucht, ein Ortskurvenstück durch Interpolation anzunähern.



$R1 = 7 \text{ Ohm}$	$R7 = 260 \text{ Ohm}$	$L4 = 21,7 \text{ mH}$	$C3 = 150 \text{ nF}$	$C9 = 32 \text{ nF}$
$R2 = 134,4 \text{ Ohm}$	$R8 = 130 \text{ Ohm}$	$L5 = 36 \text{ mH}$	$C4 = 32 \text{ nF}$	$C10 = 32 \text{ nF}$
$R3 = 260 \text{ Ohm}$	$R9 = 600 \text{ Ohm}$	$L6 = 0,7 \text{ mH}$	$C5 = 32 \text{ nF}$	$C11 = 66 \text{ nF}$
$R4 = 134,4 \text{ Ohm}$	$L1 = 36 \text{ mH}$	$L7 = 0,7 \text{ mH}$	$C6 = 150 \text{ nF}$	
$R5 = 7 \text{ Ohm}$	$L2 = 22,4 \text{ mH}$	$C1 = 100 \text{ nF}$	$C7 = 1,7 \text{ nF}$	
$R6 = 130 \text{ Ohm}$	$L3 = 0,7 \text{ mH}$	$C2 = 1,7 \text{ nF}$	$C8 = 100 \text{ nF}$	

Bild 6.1: Schaltung, deren Eingangsimpedanz nachgebildet werden soll

Beispiel 1

In Bild 6.1 ist eine Schaltung mit Kettenstruktur angegeben; die Eingangsimpedanz $Z_0(j\omega)$ dieser Schaltung soll im Frequenzbereich $300 \text{ Hz} \leq f \leq 3,4 \text{ kHz}$ durch eine möglichst einfache Schaltung nachgebildet werden.

Bezeichnet man die Eingangsimpedanz der Nachbildung mit $Z(j\omega)$, so soll der Fehlerbetrag

$$|\Delta Z(j\omega)| = |Z_0(j\omega) - Z(j\omega)|$$

vorgegebene, von der Frequenz abhängige Werte nicht überschreiten. Die Frequenzabhängigkeit des maximal zulässigen Fehlers ist in Bild 6.2 dargestellt.



Bild 6.2: Abhängigkeit des maximal zulässigen Fehlerbetrages von der Frequenz

Betrachtet man den Ortskurvenverlauf der vorgeschriebenen Funktion im angegebenen Frequenzbereich (Bild 6.3), so erkennt man, daß für eine ausreichende Annäherung eine Schaltung mit mindestens drei

Energiespeichern notwendig ist, denn der Imaginärteil der Vorschrift $Z_0(j\omega)$ wechselt bereits für Frequenzen des Approximationsintervalls zweimal das Vorzeichen.

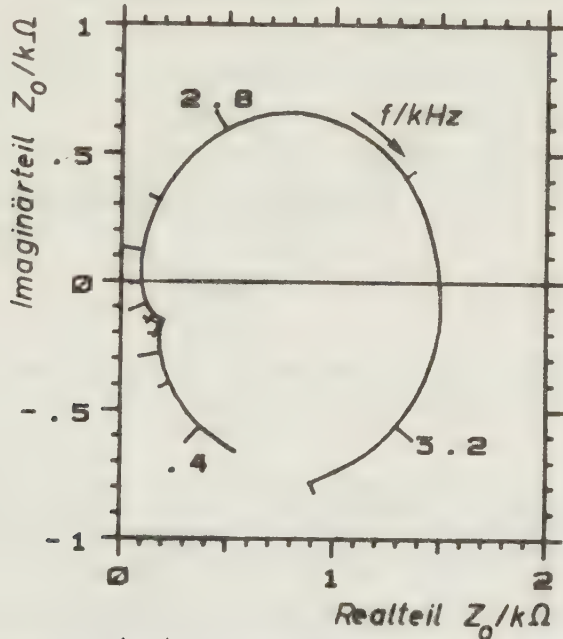


Bild 6.3: Ortskurve $Z_0(j\omega)$ der nachzubildenden Schaltung

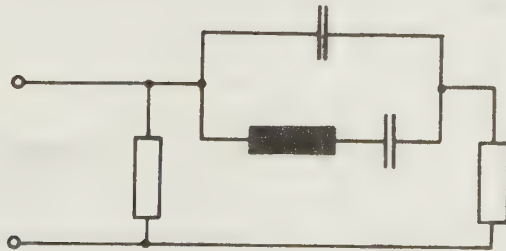


Bild 6.4: Schaltungsstruktur mit drei Energiespeichern

Schaltungen mit einer Struktur nach Bild 6.4 weisen Ortskurven auf, wie sie schematisch in Bild 6.5 dargestellt ist.

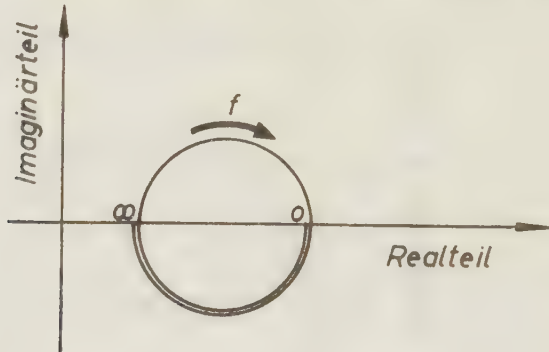


Bild 6.5: Ortskurvenverlauf für eine Schaltungsstruktur nach Bild 6.4

Für eine direkte Schaltungsoptimierung erscheint die Struktur nach Bild 6.4 günstig; um ohmsche Verluste, die bei der Realisierung der Induktivität durch eine Spule sicher auftreten, kompensieren zu können, wird bei der zu optimierenden Struktur zusätzlich ein ohmscher Widerstand in Reihe mit der Induktivität angeordnet, so daß man zu einer Struktur nach Bild 6.6 gelangt.

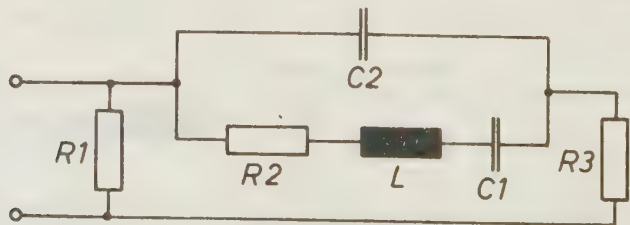


Bild 6.6: Schaltungsstruktur, die zur Nachbildung der Schaltung nach Bild 6.1 Verwendung findet

Für die Optimierung der Bauelementewerte sind noch die Anfangswerte festzulegen. Hierbei kann auf den Verlauf der Ortskurve von Bild 6.3 sowie auf den Aufbau der nachzubildenden Schaltung (Bild 6.1) zurückgegriffen werden. Berücksichtigt man zum einen die beiden Frequenzwerte aus der Ortskurvenvorschrift, für die der Imaginärteil Null wird, zum anderen das Verhalten der vorgegebenen Schaltung bei sehr kleinen und sehr großen Frequenzen und nimmt man schließlich für die beiden ohmschen Widerstände R_2 und R_3 kleine Werte an, so erhält man die Anfangswerte

$$R_1 = 1400 \text{ Ohm},$$

$$R_2 = 10 \text{ Ohm},$$

$$R_3 = 10 \text{ Ohm},$$

$$C_1 = 96 \text{ nF},$$

$$C_2 = 100 \text{ nF},$$

$$L = 54 \text{ mH}.$$

Um die Forderung nach der Güte der Approximation, die entsprechend Bild 6.2 von der Frequenz abhängt, erfüllen zu können, wird der Fehlerbetrag

$$|\Delta Z(j\omega)| = |Z(j\omega) - Z_0(j\omega)|$$

in jedem betrachteten Frequenzpunkt gewichtet.

Die durchgeführte Optimierung ergibt die folgenden Bauelementewerte:

$$R_1 = 1676 \text{ Ohm},$$

$$R_2 = 11 \text{ Ohm},$$

$$R_3 = 145 \text{ Ohm},$$

$$C_1 = 306 \text{ nF},$$

$$C_2 = 154 \text{ nF},$$

$$L = 25,6 \text{ mH}.$$

Vorschrift, Approximation und Fehler sind in Bild 6.7 dargestellt.

Es ist zu bemerken, daß das Ergebnis die gestellte Forderung um ca. 20 % übertrifft.

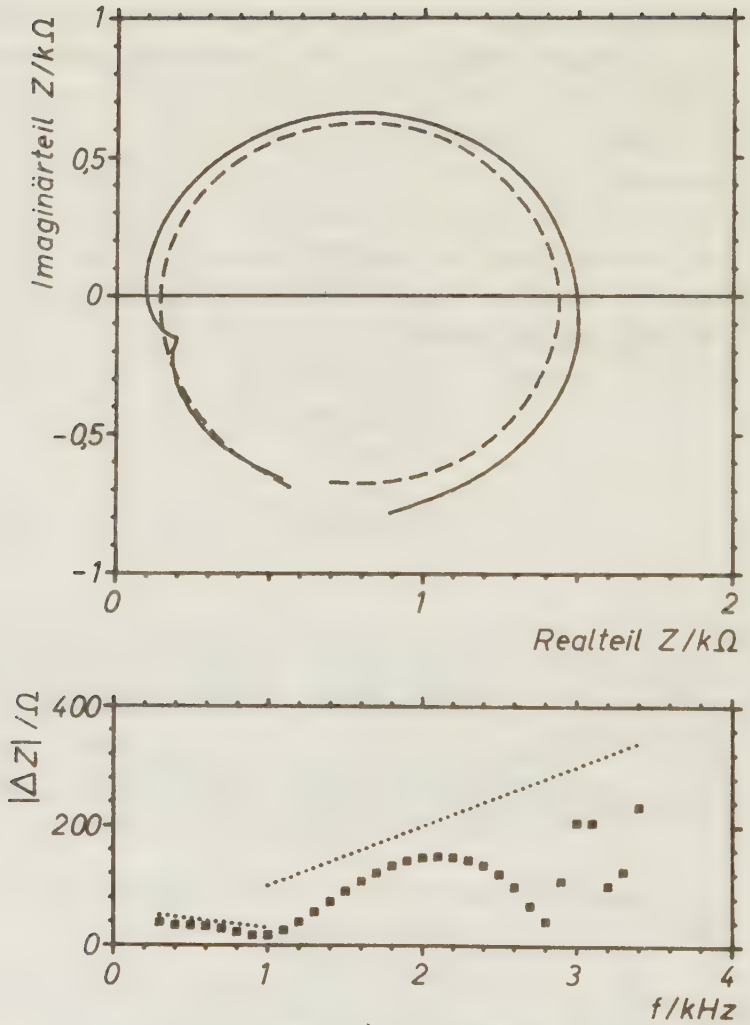


Bild 6.7: Vorschrift (—), Approximation (---), Fehler (□) und maximal zulässiger Fehler (.....) zu Beispiel 1

Beispiel 2

Das Beispiel 2 behandelt ein Problem der Leitungsnachbildung. Es soll der Wellenwiderstand

$$Z_w(j2\pi f) = \sqrt{\frac{j2\pi fL' + R'}{j2\pi fC' + G'}} \quad (6.1)$$

einer Leitung im Frequenzbereich $300 \text{ Hz} \leq f \leq 10 \text{ kHz}$ durch die Eingangsimpedanz einer RC-Schaltung angenähert werden. Für die Leitungsbeläge gilt

$$\begin{aligned} L' &= 0,7 \text{ mH/km,} \\ C' &= 36 \text{ nF/km,} \\ G' &= 0 \text{ Ohm}^{-1}/\text{km.} \end{aligned}$$

Für den Leitungsbelag R' sind verschiedene Werte vorgesehen:

$$22 \text{ Ohm/km} \leq R' \leq 266 \text{ Ohm/km.}$$

In der Darstellung des Wellenwiderstandes nach Gl.(6.1) wird hier also der Leitungsbelag G' vernachlässigt, was für praktische Anwendungen in dem angegebenen Frequenzbereich zulässig ist. Somit ergibt sich für die Vorschrift

$$Z_o(j2\pi f) = \sqrt{\frac{j2\pi fL' + R'}{j2\pi fC'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'} + \frac{1}{C'j2\pi} \frac{R'}{f}}. \quad (6.2)$$

Setzt man statt der Variablen R' und f die neue Variable $\bar{f} = f/R'$ in Gl.(6.2) ein, so erhält man als neue Vorschrift

$$\bar{Z}_o(j2\pi\bar{f}) = \sqrt{\frac{L'}{C'} + \frac{1}{C'j2\pi\bar{f}}} \quad (6.3)$$

mit dem Approximationsintervall

$$300 \text{ Hz}/R' \leq \bar{f} \leq 10 \text{ kHz}/R'.$$

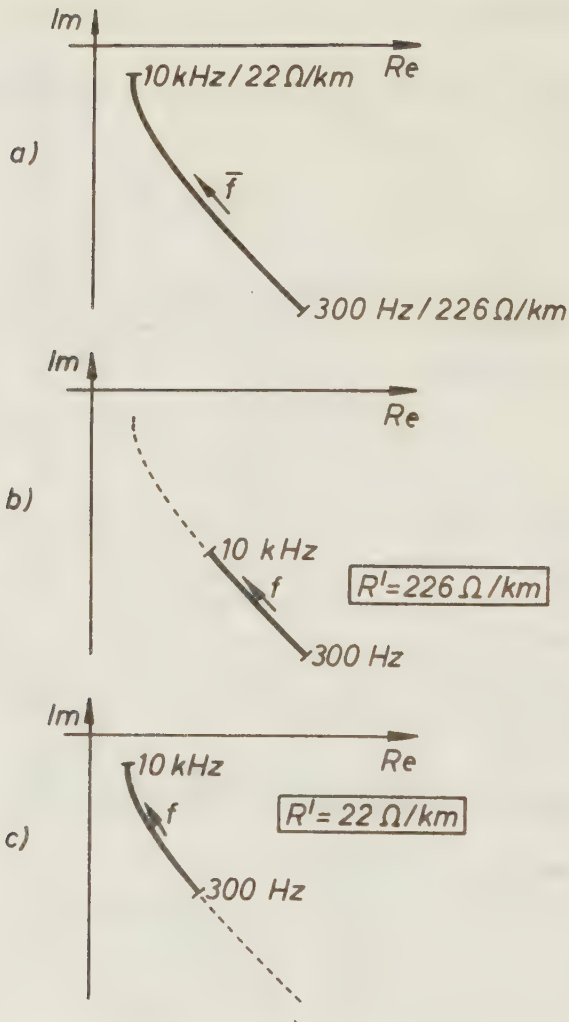


Bild 6.8: a) Ortskurve des Wellenwiderstandes, parametrisiert mit $\bar{f} = f/R'$
 b) gültiger Ortskurvenbereich für $R' = 266 \text{ Ohm/km}$
 c) gültiger Ortskurvenbereich für $R' = 22 \text{ Ohm/km}$

Es wäre nun zwar möglich, für jeden Leitungsbelag R' aus dem angegebenen Bereich eine Approximation durchzuführen, hier wird jedoch ein anderer Weg beschritten.

Approximiert man die Vorschrift Gl. (6.3) im Bereich

$$300 \text{ Hz} / 266 \text{ Ohm/km} \leq \bar{f} \leq 10 \text{ kHz} / 22 \text{ Ohm/km} ,$$

was nichts anderes bedeutet, als die Vorschrift Gl. (6.2) im Frequenzbereich $300 \text{ Hz} \leq f \leq 121 \text{ kHz}$ für $R' = 266 \text{ Ohm/km}$ anzunähern, so ergibt sich eine mit $\bar{f}$ bezifferte Ortskurve, von der jeweils ein Teil für ein festes R' gilt, wie es in Bild 6.8 dargestellt ist.

Realisiert man die gefundene Lösung, so gilt diese Schaltung für $R' = 266 \text{ Ohm/km}$. Für alle anderen ohmschen Leitungsbeläge R' sind alle Kapazitätswerte mit dem Faktor $K = 266 \text{ Ohm} / R' \text{ km}$ zu multiplizieren, wie es schematisch in Bild 6.9 dargestellt ist. Diese Überlegungen gelten unabhängig vom Grad der gefundenen RC-Impedanz und unabhängig von der Art der Realisierung.

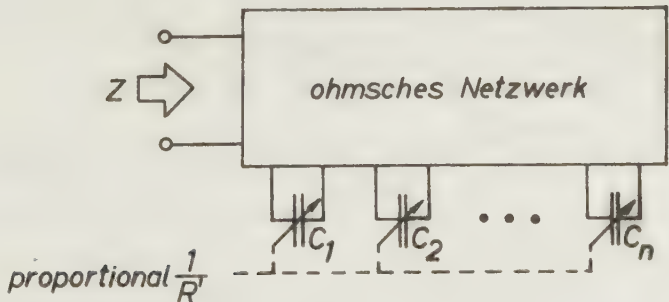


Bild 6.9: Netzwerkstruktur zur Approximation des Wellenwiderstandes einer Leitung, wobei der ohmsche Leitungsbelag R' einstellbar ist

Die Approximationsaufgabe besteht nun also darin, die Funktion

$$Z_o(j\omega) = \sqrt{\frac{0,7 \text{ mH}}{36 \text{ nF}} + \frac{266 \text{ Ohm}}{36 \text{ nF}} \frac{1}{j\omega}}$$

im Bereich $\omega_1 = 2\pi 300 \text{ s}^{-1} \leq \omega \leq 121000 \cdot 2\pi \text{ s}^{-1} = \omega_2$

durch eine RC-Impedanz Z_{RC} anzunähern.

Entsprechend einer parametrischen Darstellung von RC-Zweipolfunktionen wird angesetzt

$$Z_{RC}(j\omega) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{j\omega} + \sum_{s=1}^N \frac{x_{2s+1}^2}{x_{2s+2}^2 + j\omega}$$

mit $-\infty < x_r < \infty$, $r=1, \dots, 2N+2$.

Der Grad der Zeipolfunktion ist $N+1$, falls alle $x_r \neq 0$ sind.

Im Vektor

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{2N+2})^T$$

sind die Optimierparameter, die keinen Einschränkungen unterworfen sind, zusammengefaßt. Um eine Optimierung durchführen zu können, muß noch ein Fehler definiert werden. Hier wird die Reflexionsfunktion

$$r(j\omega) = \frac{Z_o(j\omega) - Z_{RC}(j\omega)}{Z_o(j\omega) + Z_{RC}(j\omega)}$$

verwendet; als Fehler in den betrachteten Stützstellen ω_i wird

$$F_i = |r(j\omega_i)|$$

angesehen.

Unter Verwendung von 99 Stützstellen bei logarithmischer Unterteilung des Approximationsintervalls $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ wurde zunächst die Fehlerquadratsumme

$$FQS = F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_{99}^2$$

minimiert und schließlich durch Schrankenoptimierung

$$\text{Maximum}_{i=1,2,\dots,99} \left[|r(j\omega_i)| \right]$$

minimiert. Die erreichten Ergebnisse sind in Tabelle 6.1 aufgeführt.

Grad der RC-Zweipolfunktion	$\text{Max}_i \left[r(j\omega_i) \right]$
2	10 %
3	2,5 %
4	0,7 %
5	0,2 %
6	0,04 %
7	0,015 %

Tabelle 6.1: Ergebnis der Approximation zu Beispiel 2

Aus dem Ergebnis, das in der Form

$$Z_{RC}(p) = A_1 + \frac{A_2}{p} + \sum_{s=1}^N \frac{A_{2s+1}}{A_{2s+2} + p}$$

mit $A_j = x_j^2$, $j = 1, 2, \dots, 2N+2$ vorliegt, lassen sich nun verschiedene Schaltungen angeben. In Bild 6.10 sind beispielhaft zwei äquivalente Schaltungen für Grad 3, in Bild 6.11 zwei äquivalente Schaltungen für Grad 6 angegeben.

Die kleineren Kapazitätswerte beziehen sich dabei auf den Leitungsbelag $R' = 266 \text{ Ohm/km}$, die größeren Kapazitätswerte gelten für $R' = 22 \text{ Ohm/km}$. Für alle anderen Leitungsbeläge

$$22 \text{ Ohm/km} < R' < 266 \text{ Ohm/km}$$

können die Kapazitätswerte mit dem bereits geschilderten Verfahren berechnet werden.

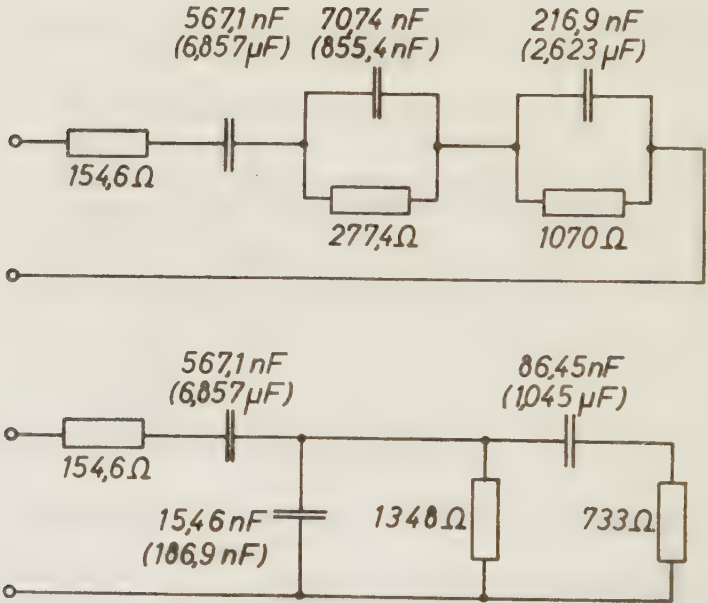


Bild 6.10: Äquivalente Schaltungen mit drei Kondensatoren zur Leitungsnachbildung für $R' = 266\,\text{Ohm/km}$ ($22\,\text{Ohm/km}$)

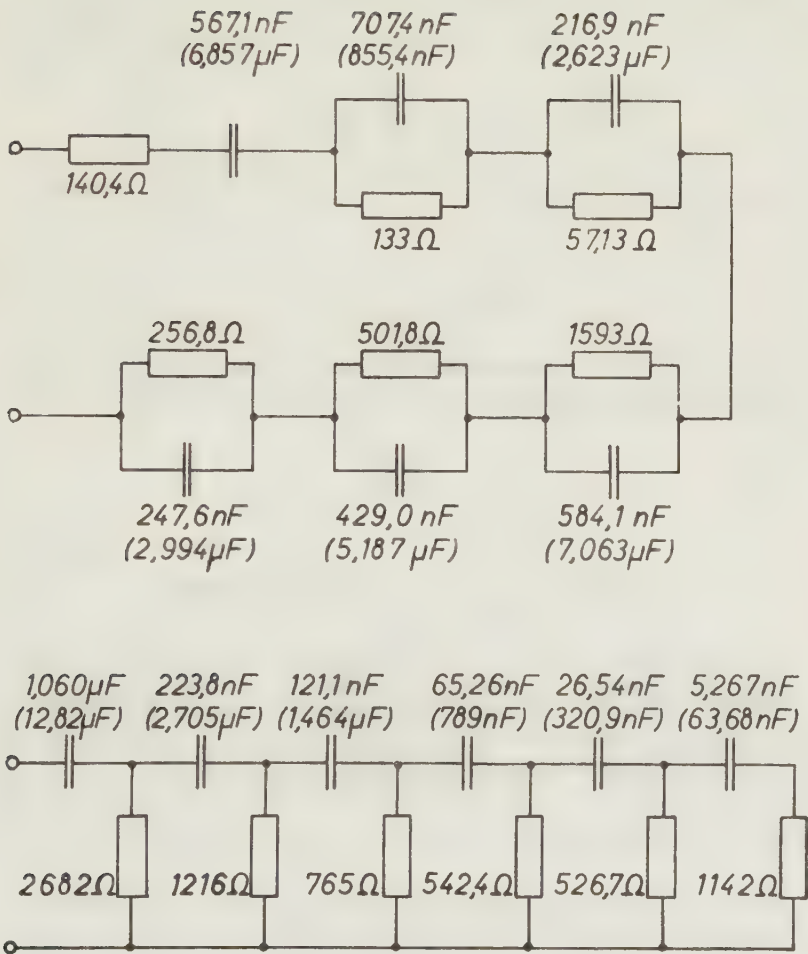


Bild 6.11: Äquivalente Schaltungen mit sechs Kondensatoren zur Leitungsnachbildung für $R' = 266 \text{ Ohm/km}$ (22 Ohm/km)

Beispiel 3

Übertragungsfunktionen $H(p) = U_2/U_1$ lassen sich durch Schaltungsstrukturen nach Bild 6.12 realisieren, falls folgende Bedingungen erfüllt sind [13]:

a) $H(p)$ ist Zweipolfunktion und

b) $\operatorname{Re}[1/H(j\omega)] \geq 1$ für $0 \leq \omega \leq \infty$.

Für die Impedanz $Z(p)$ gilt

$$Z(p) = R \cdot \left[\frac{1}{H(p)} - 1 \right].$$

Das in Bild 6.12 dargestellte Netzwerk besitzt die frequenzunabhängige Eingangsimpedanz R .

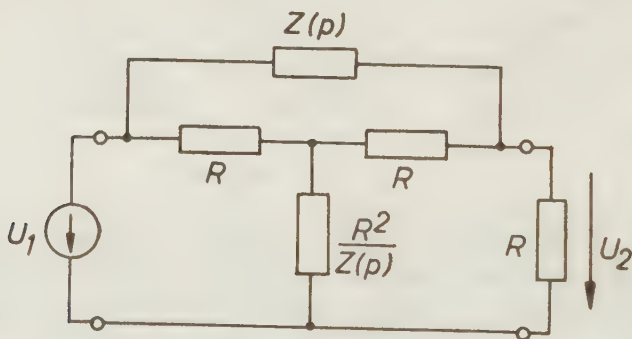


Bild 6.12: Überbrücktes T-Netzwerk mit dualen Impedanzen

Bild 6.13 zeigt den Dämpfungsverlauf einer Vorschrift aus der Trägerfrequenztechnik im Frequenzbereich $25 \text{ kHz} \leq f \leq 1,3 \text{ MHz}$.

Von R. UNBEHAUEN [21, 2. Beispiel] stammt ein Netzwerk mit der Struktur eines überbrückten T-Gliedes, das die in Bild 6.13 dargestellte Dämpfungsvorschrift näherungsweise erfüllt. Die in Bild 6.12

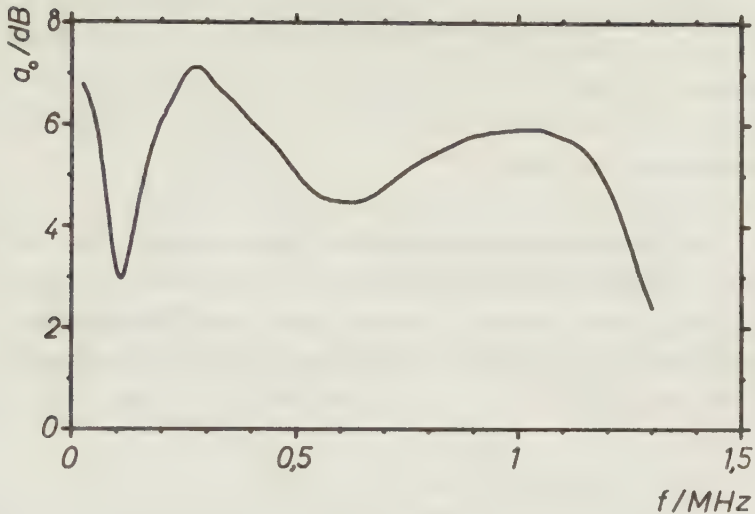


Bild 6.13: Vorschrift eines Dämpfungsverlaufes aus der Trägerfrequenztechnik

auf tretenden Impedanzen $Z(p)$ und $R^2/Z(p)$ wurden kanonisch mit Hilfe des BRUNE-Verfahrens realisiert; das angegebene Netzwerk enthält 25 Bauelemente, davon vier festgekoppelte Übertrager. Gegenüber der Vorschrift tritt im Approximationsintervall ein maximaler Fehler von 0,6 dB auf.

W. HOHNEKER [13, 1. Beispiel] gibt ein weiteres Netzwerk an. Die in [21] realisierte Übertragungsfunktion wird in das Produkt von drei Teilübertragungsfunktionen zerlegt und durch die Hintereinanderschaltung von drei Überbrückten T-Gliedern realisiert. Die jeweiligen Impedanzen $Z(p)$ und $R^2/Z(p)$ haben dabei den Grad Zwei und sind Übertragerfrei zu realisieren. Der Wegfall der Übertrager bewirkt dabei allerdings eine zusätzliche Grunddämpfung von 4,14 dB.

E. WEHRHAHN [24, Beispiel 4] löst die Approximationsaufgabe durch direkte Schaltungsoptimierung. Das Ergebnis zeichnet sich durch Übertragerfreiheit und einen geringen Fehler von 0,17 dB aus, wobei (bei gleicher Anzahl reaktiver Elemente) keine zusätzliche Grunddämpfung auftritt.

Hier soll nun eine weitere Lösungsmöglichkeit aufgezeigt werden, bei der eine parametrische Darstellung der zu bestimmenden Zweipolfunktion entsprechend Kapitel 4 zugrunde gelegt wird. Wie bei allen erwähnten Lösungen wird auch hier der Grad 6 gewählt; dies bedeutet, daß für den Ansatz

$$Z(p) = \frac{d^2 D + \sum_{i=1}^3 D_i \left[(a_i^2 + b_i^2) p + b_i^2 c_i^2 + 2b_i c_i \Omega_i d \right]}{D + \sum_{i=1}^3 p c_i^2 D_i} +$$

$$+ \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{k=i+1}^3 D_{ik} \left\{ \left[(a_i c_k - a_k c_i)^2 + b_i^2 c_k^2 + b_k^2 c_i^2 \right] p^2 + 2b_i b_k c_i c_k \Omega_i \Omega_k \right\}}{D + \sum_{i=1}^3 p c_i^2 D_i} \quad (6.4)$$

mit $D = \prod_{r=1}^3 (p^2 + \Omega_r^2)$, $D_i = D / (p^2 + \Omega_i^2)$, $D_{ik} = D_i / (p^2 + \Omega_k^2)$

13 Parameter zur Verfügung stehen, nämlich

$$d, a_i, b_i, c_i, \Omega_i, \quad i=1,2,3.$$

Die Elemente des Parametervektors

$$\underline{x} = (d, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T$$

sind keinen Einschränkungen unterworfen.

Gegenüber einer allgemeinen Zweipolfunktion vom Grad 6 ist bei dem Ansatz nach Gl.(6.4) nur eine Einschränkung vorhanden:

$$Z(p) < \infty \quad \text{für } p \rightarrow \infty .$$

Diese Einschränkung läßt sich durch folgenden Ansatz umgehen:

$$Z(p) = Lp + Z_5(p) \quad \text{mit } L = x_1^2,$$

wobei $Z_5(p)$ eine Zweipolfunktion vom Grad ≤ 5 darstellt. $Z(p)$ hat dann einen Pol in $p \rightarrow \infty$ für $x_1 \neq 0$ oder ist vom Grade ≤ 5 für $x_1 = 0$. Eine andere Möglichkeit besteht darin, statt $Z(p)$ von Gl.(6.4)

$$Y(p) = 1/Z(p)$$

zu betrachten. Die Zweipolfunktion $Y(p)$ kann einen Pol in $p \rightarrow \infty$ besitzen, dort jedoch keine Nullstelle.

Bei den hier durchgeführten Rechnungen wird der Ansatz nach Gl.(6.4) für die zu bestimmende Zweipolfunktion verwendet.

Wesentlicher Bestandteil des Approximationsprogrammes ist ein realisiertes Unterprogramm, welches für einen vorgegebenen Grad n einer Zweipolfunktion in parametrischer Darstellung und einen vorgegebenen Parametervektor $\underline{x}$, dessen Dimension $l = 2n + 1$ betragen muß, für die Kreisfrequenz ω_i den komplexen Funktionswert

$$Z(j\omega_i, \underline{x}) = X(\omega_i, \underline{x}) + j Y(\omega_i, \underline{x})$$

sowie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial X(\omega_i, \underline{x})}{\partial x_k} \quad \text{und} \quad \frac{\partial Y(\omega_i, \underline{x})}{\partial x_k}$$

für alle Parameter x_k , $k = 1, 2, \dots, l$ berechnet.

Als Fehler für die Optimierung wird

$$F(\omega_i) = 10 \log \left[(1 + X(\omega_i))^2 + Y^2(\omega_i) \right] - A_0(\omega_i)$$

angesehen, wobei $A_0(\omega_i)$ die Dämpfungsvorschrift für die Kreisfrequenz ω_i bedeutet. Die Jacobi-Matrix, deren Erstellung für das verwendete Optimierprogramm notwendig ist, ist bestimmt durch die Elemente

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{20 \log e}{(1+x_i)^2 + y_i^2} \left[(1+x_i) \frac{\partial x_i}{\partial x_j} + y_i \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right],$$

wobei der Index i bedeutet, daß die Kreisfrequenz ω_i einzusetzen ist.

Tabelle 6.2 zeigt Startwerte und Endwerte der 13 Parameter.

Parameter	Startwerte	Endwerte
$x_1 = d$	1	1,29963
$x_2 = a_1$	1	-0,630697
$x_3 = a_2$	2	0,236000
$x_4 = a_3$	3	0,389222
$x_5 = b_1$	1	-0,0301989
$x_6 = b_2$	2	0,00382269
$x_7 = b_3$	3	0,354445
$x_8 = c_1$	1	0,774734
$x_9 = c_2$	2	-0,364264
$x_{10} = c_3$	3	-0,566034
$x_{11} = \Omega_1$	1	0,618200
$x_{12} = \Omega_2$	2	-0,110401
$x_{13} = \Omega_3$	3	1,43007

Tabelle 6.2: Startwerte und Endwerte bei der Optimierung einer Zweipolfunktion in parametrischer Darstellung

Mit diesen Parametern ist die erhaltene Zweipolfunktion bestimmt.

In Koeffizientenform lautet sie

$$Z(p) = \frac{\sum_{r=0}^6 A_r p^r}{\sum_{r=0}^6 B_r p^r}$$

mit	$A_0 = 0,0122525$	$B_0 = 0,00952614$
	$A_1 = 0,0547712$	$B_1 = 0,120160$
	$A_2 = 1,03696$	$B_2 = 0,811165$
	$A_3 = 1,06473$	$B_3 = 1,68323$
	$A_4 = 3,47605$	$B_4 = 2,43946$
	$A_5 = 0,731526$	$B_5 = 1,05330$
	$A_6 = 1,68904$	$B_6 = 1,00000.$

In Bild 6.14 sind Vorschrift, Approximation und Fehler in den betrachteten 37 Stützstellen dargestellt. Der maximale Fehler in den betrachteten Stützstellen beträgt 0,15 dB.

Bild 6.15 zeigt eine mögliche Realisierung von $Z(p)$. Hierbei wurde eine Realisierung nach BRUNE durchgeführt.

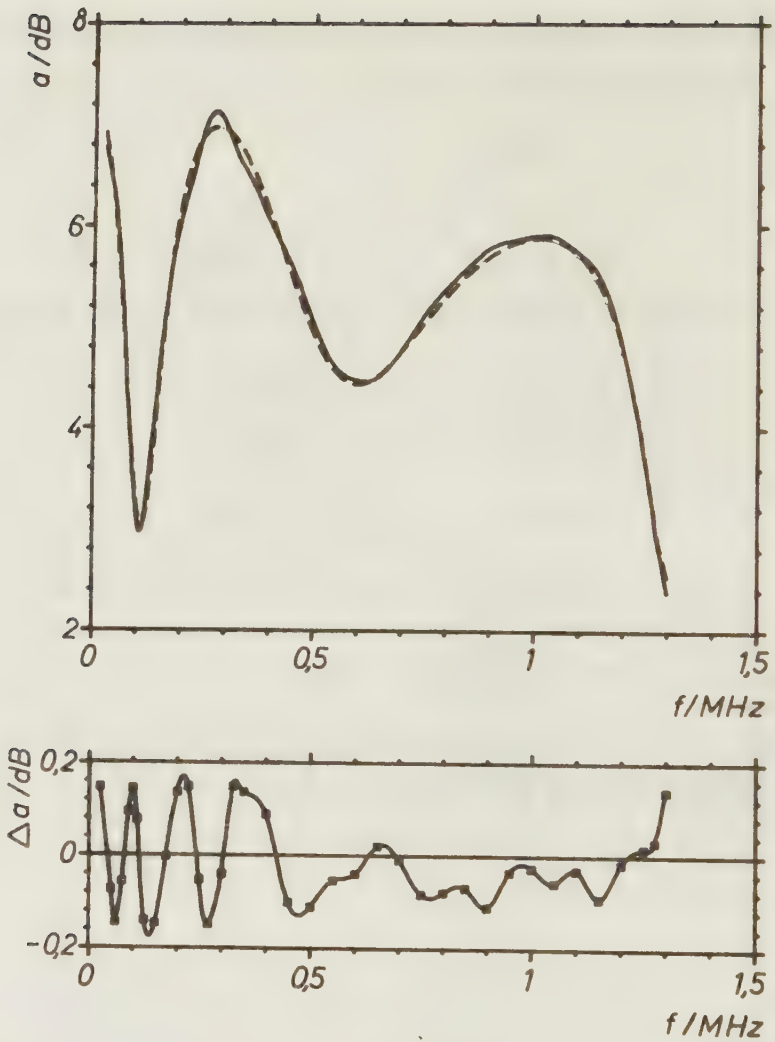


Bild 6.14: Vorschrift (—), Approximation (---) und Fehler(□)
zu Beispiel 3

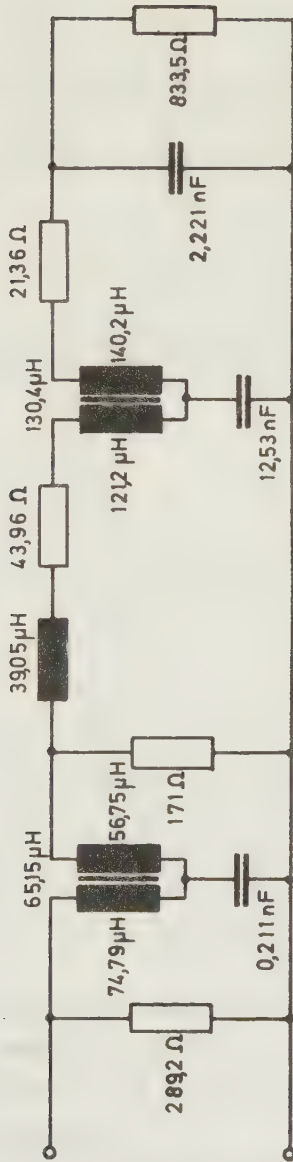


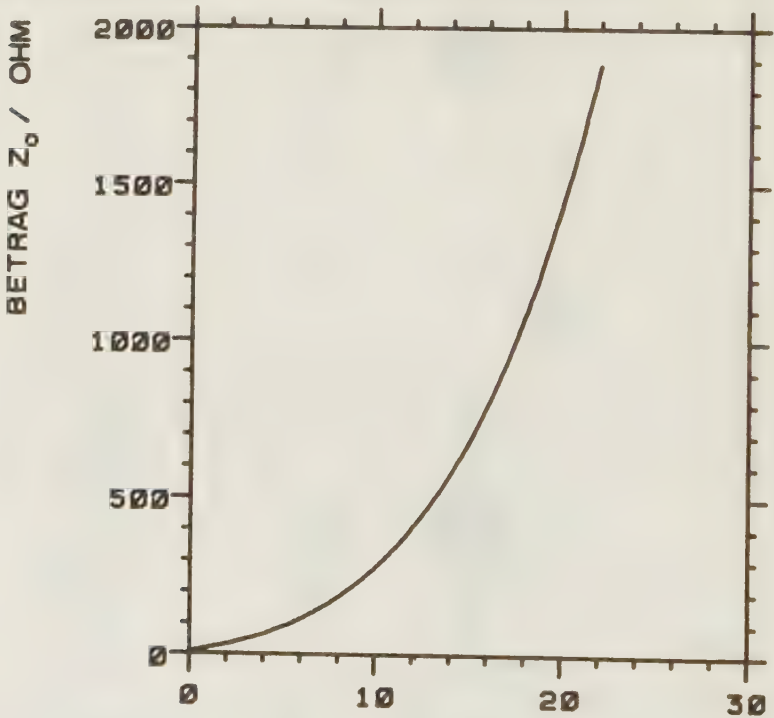
Bild 6.15: Realisierung von $Z(p)$ für eine Schaltungsstruktur nach Bild 6.12 zur Dämpfungsapproximation der Vorschrift nach Bild 6.13

Beispiel 4

Eine Zweipolfunktion $Z(p)$ soll so bestimmt werden, daß $|Z(p)|$ mit $p = j2\pi f$ im Bereich $300 \text{ kHz} \leq f \leq 22 \text{ MHz}$ die in Bild 6.16 dargestellte Vorschrift $|Z_o|$ approximiert. Bei der Annäherung soll der relative Fehler

$$\frac{|Z| - |Z_o|}{|Z_o|} = \frac{\Delta Z}{|Z_o|}$$

im betrachteten Frequenzbereich möglichst klein werden.



FREQUENZ / MHZ

Bild 6.16: Vorschrift für eine Betragsapproximation durch eine Zweipolfunktion

Für eine Approximation durch eine rationale, reelle (nicht notwendigerweise positive) Funktion $H(p)$ mit $p = j2\pi f$ genügt der Grad 3, um die Vorschrift mit einem relativen Fehler von nur 0,5 % anzunähern. Dieses Ergebnis hat eine Ortskurve, wie sie in Bild 6.17 dargestellt ist; es ist zu erkennen, daß es sich nicht um eine Zweipolfunktion handeln kann, da die Realteilbedingung verletzt ist.

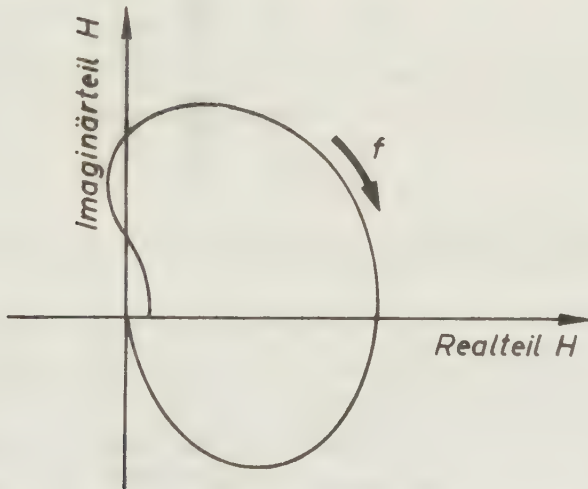


Bild 6.17: Ortskurve der rationalen, reellen Funktion $H(j2\pi f)$

Es zeigt sich, daß die Bedingung "Positivität des Realteils" eine sehr einschneidende Bedingung darstellt; eine ähnlich gute Annäherung durch Zweipolfunktionen vom Grade ≤ 6 konnte bei weitem nicht erreicht werden.

Eine direkte Schaltungsoptimierung mit einer Netzwerkstruktur nach Bild 6.18 (5 Energiespeicher) ergibt einen maximalen relativen Fehler von 14 %.

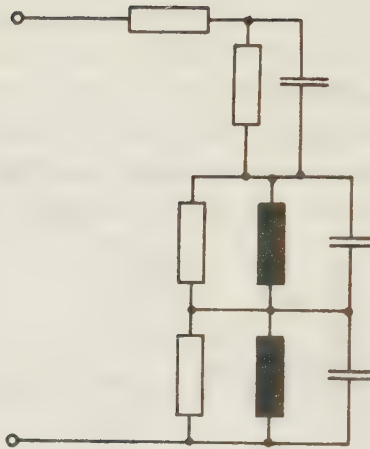


Bild 6.18: Netzwerkstruktur für eine direkte Schaltungsoptimierung

Da dieses Ergebnis nicht befriedigend ist, wird eine parametrische Darstellung der Zweipolfunktion für die Optimierung gewählt. Für Grad 4 erhält man einen maximalen relativen Fehler von 4,7 %. Dies bedeutet, daß mit einem niedrigeren Grad der Zweipolfunktion als bei der direkten Schaltungsoptimierung hier ein weit besseres Ergebnis erreicht wird. Begründet ist dies durch die nicht sehr günstig gewählte Struktur nach Bild 6.18. Für einen Ansatz der Zweipolfunktion in parametrischer Darstellung vom Grad 6, d.h. mit 13 für die Optimierung zur Verfügung stehenden Parametern, ergibt sich ein maximaler relativer Fehler von 2,4 %.

Die erhaltene Zweipolfunktion

$$Z(p) = \frac{\sum_{\nu=0}^6 A_{\nu} p^{\nu}}{\sum_{\nu=0}^6 B_{\nu} p^{\nu}}$$

mit	$A_0 = 14379000$	$B_0 = 1553570$
	$A_1 = 43219900$	$B_1 = 1717780$
	$A_2 = 27763300$	$B_2 = 230958$
	$A_3 = 4403250$	$B_3 = 14286,3$
	$A_4 = 101987$	$B_4 = 987,610$
	$A_5 = 7021,79$	$B_5 = 22,2616$
	$A_6 = 0,393535$	$B_6 = 1$

(Normierungsfrequenz: $f_0 = 1 \text{ MHz}$)

ist als Ortskurve $Z(j2\pi f)$ in Bild 6.19 dargestellt, wobei der Verlauf für die Frequenzen des Approximationsintervalls hervorgehoben ist.

Anzumerken ist, daß die erhaltene Ortskurve eine grobe Ähnlichkeit mit der Ortskurve besitzt, die durch eine rationale, reelle Approximation erhalten wurde (Bild 6.17); die Ortskurve der Zweipolfunktion verläuft jedoch vollständig in der Halbebene $\text{Realteil} \geq 0$.

Ausschnitte dieser Ortskurve für Frequenzen, bei denen die Kurve die imaginäre Achse tangiert bzw. ihr sehr nahe kommt, sind in den Bildern 6.20 und 6.21 dargestellt.

Die Annäherung an die Vorschrift sowie den Verlauf des Fehlers im Approximationsintervall zeigt Bild 6.22. Hierbei sind die Betragsvorschrift sowie die Approximation logarithmisch aufgetragen, um die gleichmäßige Annäherung bezüglich des relativen Fehlers darzustellen.

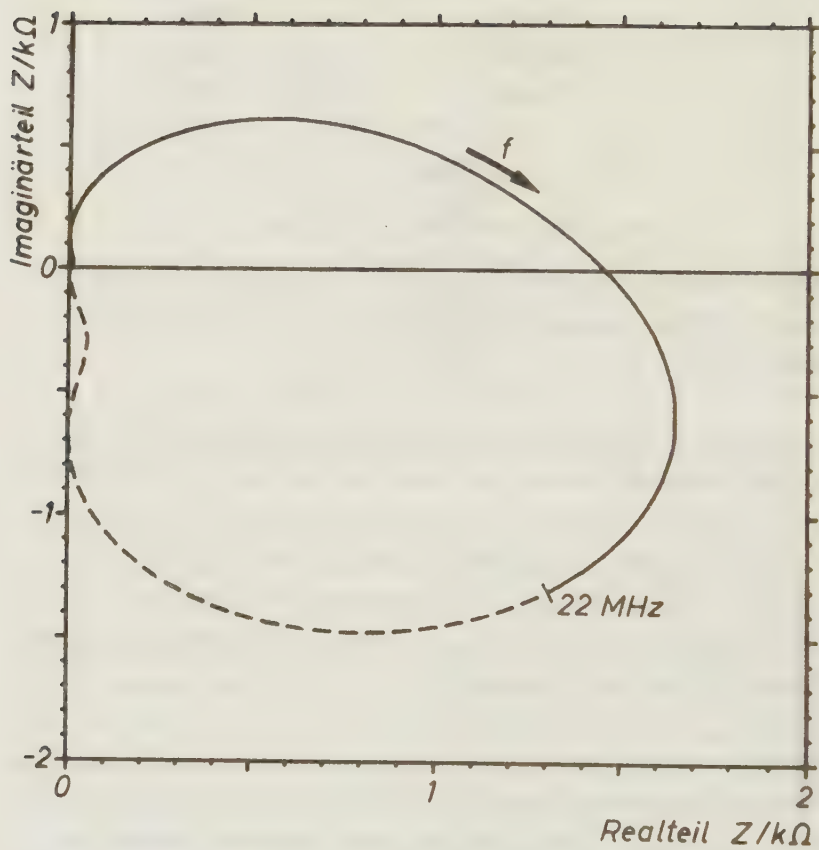


Bild 6.19: Ortskurve $Z(j2\pi f)$ der annähernden Zweipolfunktion

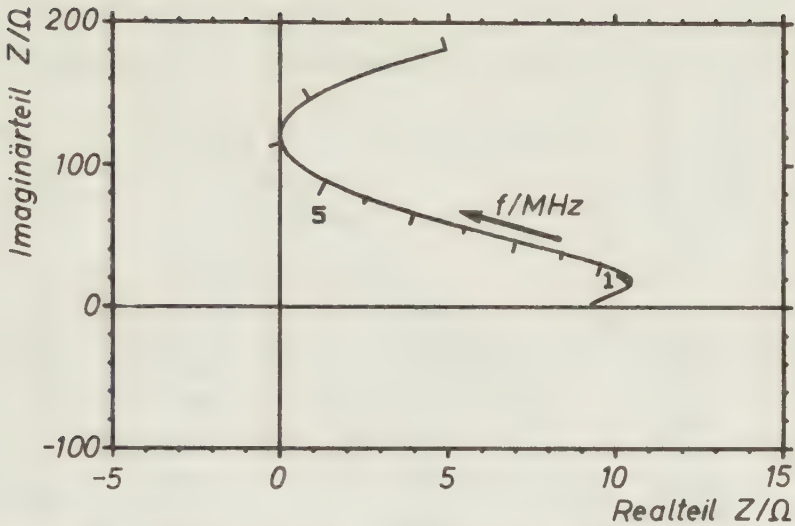


Bild 6.20: Ortskurve $Z(j2\pi f)$ der annähernden Zweipolfunktion
im Bereich $0,3 \text{ MHz} \leq f \leq 8 \text{ MHz}$

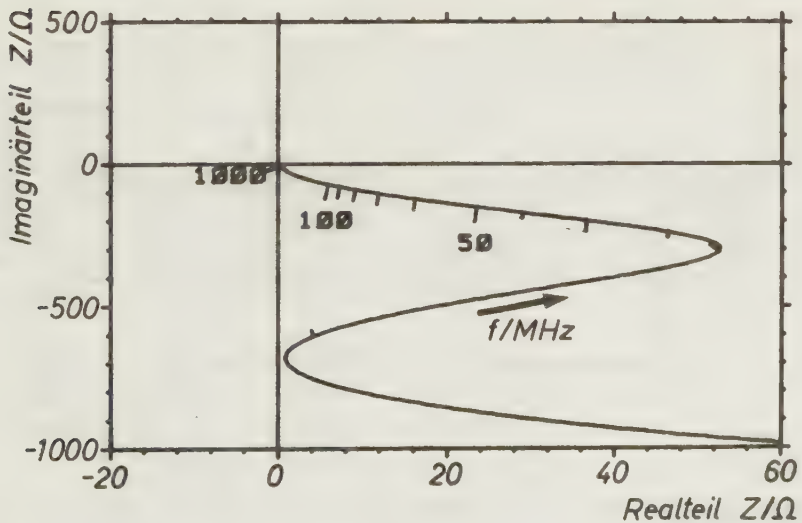


Bild 6.21: Ortskurve $Z(j2\pi f)$ der annähernden Zweipolfunktion
im Bereich $24 \text{ MHz} \leq f \leq 1000 \text{ MHz}$

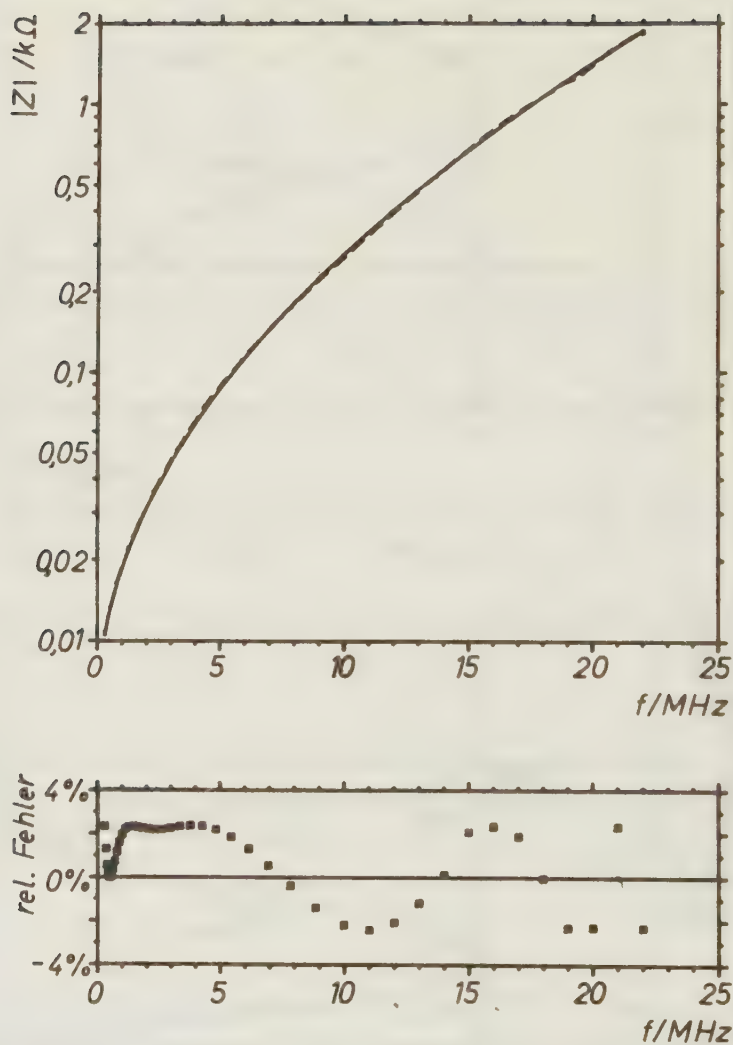


Bild 6.22: Vorschrift (—), Approximation (---) und Fehler (■) zu Beispiel 4

Beispiel 5

Gegeben ist eine Zweipolfunktion in normierter Form

$$Z_o(p) = \frac{\sum_{r=0}^7 A_r p^r}{\sum_{r=0}^7 B_r p^r}$$

mit	$A_0 = 630,$	$B_0 = 126,$
	$A_1 = 1901,$	$B_1 = 819,$
	$A_2 = 3661,$	$B_2 = 1460,$
	$A_3 = 4175,$	$B_3 = 1445,$
	$A_4 = 3141,$	$B_4 = 755,$
	$A_5 = 1384,$	$B_5 = 315,$
	$A_6 = 411,$	$B_6 = 63,$
	$A_7 = 63,$	$B_7 = 0,$

die im Frequenzbereich $1 \leq \omega \leq 2$ durch eine Zweipolfunktion niedrigeren Grades nachgebildet werden soll.

Hier wird das Interpolationsverfahren nach [15] verwendet. Dies bedeutet, daß zunächst Interpolationspunkte auszuwählen sind, wobei der Grad der interpolierenden Zweipolfunktion von der Anzahl der Interpolationspunkte abhängt. Gewählt werden

$$\begin{aligned} Z_o(j 1,2) &= 0,6716 + j 1,6786, \\ Z_o(j 1,6) &= 1,6827 + j 3,4299, \\ Z_o(j 1,8) &= 3,2538 + j 3,9241, \\ Z_o(j 1,95) &= 4,3530 + j 2,9819. \end{aligned}$$

Diese Interpolationspunkte sowie der Ortskurvenverlauf der vorgegebenen Zweipolfunktion sind in Bild 6.23 dargestellt.

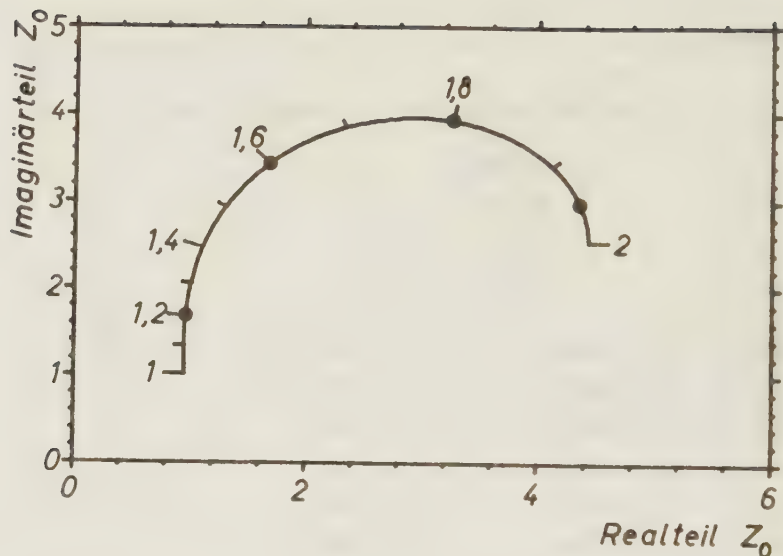


Bild 6.23: Ortskurve der Vorschrift mit Interpolationspunkten

Nach vier Vorwärtszyklen, wobei in jedem Zyklus ein Interpolationspunkt verwendet wird, liegen folgende Bedingungen vor, die in Bild 6.24 veranschaulicht werden: die Ausgangsfunktion für die Rücktransformation, sie sei $Z^{(4)}(p)$ genannt, muß für $p = j\omega$ und $0 \leq \omega \leq \infty$ im Gebiet A beginnen und durch das Gebiet B verlaufen, wobei als Endpunkte Werte zwischen $-0,96905$ und $-0,69344$ zugelassen sind.

Diese Forderungen sind durch eine Konstante nicht zu erfüllen, $Z^{(4)}(p)$ muß also mindestens vom Grad Eins sein; dies bedeutet, daß nach vier Rücktransformationen die interpolierende Zweipol-funktion den Grad Fünf besitzt.

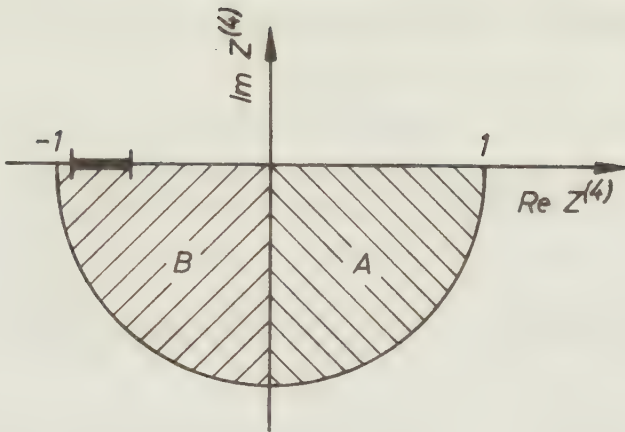


Bild 6.24: Gebiete, in denen die Ausgangsfunktion für die Rücktransformation verlaufen muß

Unter Verwendung des Ansatzes

$$Z^{(4)}(p) = 0,8 \cdot \frac{1 - 0,5p}{1 + 0,5p}$$

und nach Durchführung aller vier Rücktransformationen erhält man als Ergebnis

$$Z(p) = \frac{\sum_{r=0}^5 a_r p^r}{\sum_{r=0}^5 b_r p^r}$$

mit	$a_0 = 19,3606$	$b_0 = 15,4702$
	$a_1 = 23,2110$	$b_1 = 7,7983$
	$a_2 = 21,7621$	$b_2 = 9,3261$
	$a_3 = 10,3724$	$b_3 = 3,1290$
	$a_4 = 4,2781$	$b_4 = 1,3656$
	$a_5 = 1,1202$	$b_5 = 0,28902.$

In Bild 6.25 ist die Fehlerortscurve

$$\Delta Z(j\omega) = Z(j\omega) - Z_0(j\omega)$$

dargestellt. Es ist zu erkennen, daß die Interpolationsaufgabe erfüllt ist, denn die Fehlerortscurve durchläuft für die vier Frequenzen der Interpolationspunkte den Nullpunkt. Dennoch kann man nicht von einer guten Annäherung im Frequenzbereich $1 \leq \omega \leq 2$ sprechen. Dies zeigt deutlich der Verlauf der interpolierenden Kurve im Bereich $1,95 \leq \omega \leq 2$ in Bild 6.26.

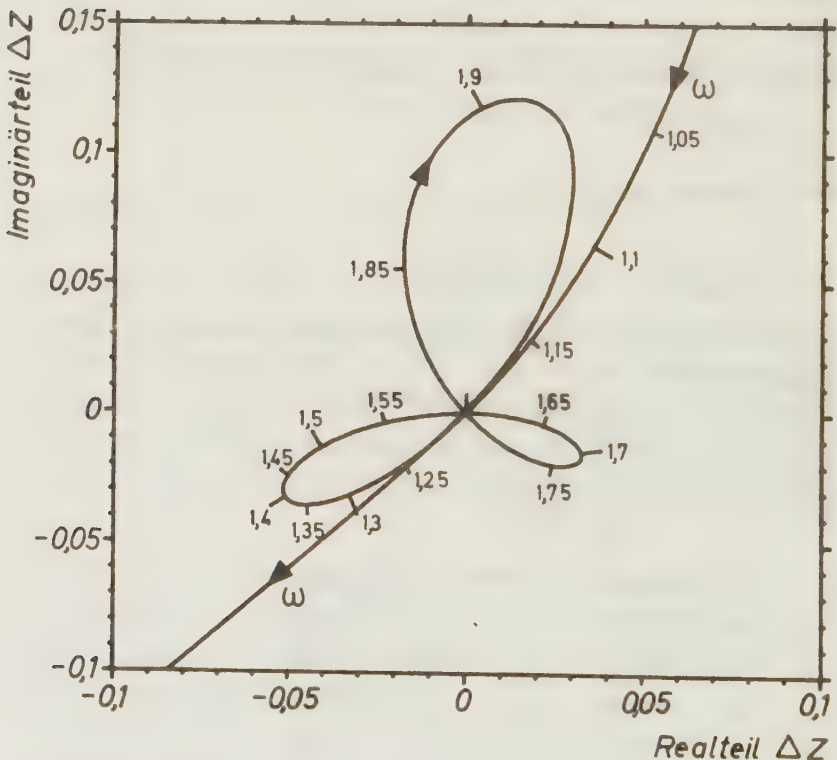


Bild 6.25: Fehlerortscurve

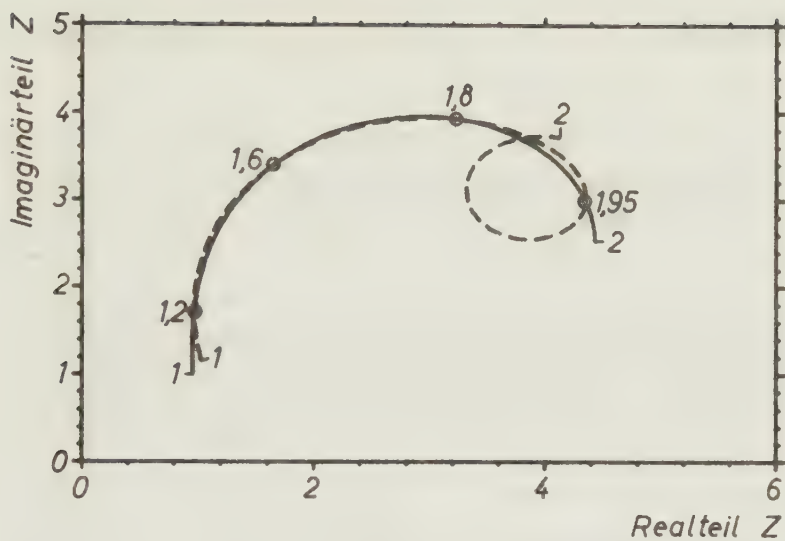


Bild 6.26: Vorschrift (—), Interpolationspunkte (○) und interpolierende Kurve (---) zu Beispiel 5

ZUSAMMENFASSUNG

Das Eingangsverhalten elektrischer Zweipole, die nur aus Ohmwiderständen, Kapazitäten, Induktivitäten und idealen Übertragern bestehen, kann durch rationale, reelle und positive Funktionen, Zweipolfunktionen genannt, beschrieben werden. Es werden verschiedene Verfahren untersucht, die es ermöglichen, eine in einem Frequenzbereich gegebene komplexwertige Vorschrift durch eine Zweipolfunktion anzunähern. Wird eine Approximation durch Optimierung einer Schaltung, d.h. durch geeignetes Verändern der Bauelementewerte durchgeführt, so ist das Problem zu lösen, eine Struktur für die Schaltung sowie Anfangswerte für die Bauelemente vorzugeben. Vorgehensweisen hierzu werden aufgezeigt, wobei Strukturen, wie sie bei der Zweipolsynthese nach dem BRUNE-Verfahren entstehen, gesondert behandelt werden. Ferner wird angegeben, wie durch eine zweistufige Approximation eine annähernde Zweipolfunktion erhalten werden kann, wobei zunächst der Realteil der Zweipolfunktion im gesamten Frequenzbereich durch Cubic Spline - Funktionen dargestellt, der Imaginärteil durch die HILBERT-Transformation bestimmt und schließlich eine rationale Approximation durchgeführt wird. Eine neuartige Methode zur schnellen numerischen Auswertung der HILBERT-Transformation in einem transformierten Frequenzbereich wird vorgestellt. Parametrische Darstellungen für Zweipolfunktionen, bei denen die Parameter, die einer Optimierung unterzogen werden, keinen Einschränkungen unterliegen, werden untersucht. Weitere Verfahren zur Annäherung von Realteil oder Betrag sowie ein Programmkonzept zur interaktiven Lösung des Approximationsproblems werden behandelt. Fünf ausführlich dargestellte Beispiele veranschaulichen die aufgezeigten Lösungsmöglichkeiten.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BOTT, R. und DUFFIN, R.J.:
Impedance Synthesis Without Use of Transformers. J. Appl.
Phys. 20 (1949) S.816

- [2] BRUNE, O.:
Synthesis of a Finite Two-Terminal Network Whose Driving-Point
Impedance is a Prescribed Function of Frequency. J. Math. Phys.
10 (1931) S.191-236

- [3] BULIRSCH, R. und RUTISHAUSER, H.:
Interpolation und genäherte Quadratur. In Mathematische Hilfs-
mittel des Ingenieurs, Teil III, Springer-Verlag Berlin 1968

- [4] CREMER, H., EFFERTZ, F.H. und BREUER, K.H.:
Zur Synthese zweipoliger elektrischer Netzwerke mit vorgeschrie-
benen Frequenzcharakteristiken. Forschungsberichte des Landes
Nordrhein-Westfalen, Nr. 1262 (1964)

- [5] FETTWEIS, A.:
Parametric Representation of Brune Functions. Int. J. Cir.
Theor. Appl. 7 (1979) S. 113-119

- [6] FIACCO, A.V. und MC CORMICK, G.F.:
Nonlinear programming: Sequential unconstrained minimization
technique. John Wiley & Sons, New York 1968

- [7] FORSTER, U. und UNBEHAUEN, R.:
Comments on Parametric Representations of Brune Functions.
Erscheint in Int. J. Cir. Theor. Appl. 8 (1980)

- [8] GAISSMAIER, B.:
Beiträge zur Approximation von Dämpfungsentzerrern. Dissertation, Universität Erlangen - Nürnberg 1975

- [9] GAISSMAIER, B., GRASSER, G., HANSEN, U. und WEIMANN, G.:
Grafik-Software am Lehrstuhl für Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik der Universität Erlangen - Nürnberg (1978)

- [10] GAISSMAIER, B., HOHNEKER, W., UNBEHAUEN, R. und WEHRHAHN, E.:
Optimierungsverfahren für den Schaltungsentwurf, Überblick und vergleichende Beurteilung. Teil I: Frequenz 29 (1975) 4, S.112 - 117; Teil II: Frequenz 29 (1975) 5, S.124-133

- [11] GEHER, K.:
Theory of Network Tolerances. Akadémiai Kiadó, Budapest 1971

- [12] GÖPFERT, W.:
Fast Approximation of Complex Network Functions by Vectorial Projection. Siemens Forsch. - u. Entwickl. - Ber. (1979) 4 S. 214-220

- [13] HOHNEKER, W.:
Beiträge zur Übertragerfreien Realisierung von Übertragungsfunktionen mit Hilfe von Überbrückten T-Gliedern und abgewandelten Netzwerkstrukturen. Dissertation, Universität Erlangen-Nürnberg 1974

- [14] MÖSSLER, G.:
Grafische Darstellung von Ortskurven. Studienarbeit am Lehrstuhl für Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik der Universität Erlangen - Nürnberg (1977)
- [15] MING, NAI-TA:
Interpolationsproblem zur Approximation einer Ortskurve oder komplexen Funktion durch positive reelle Funktionen oder Übertragungsfunktionen. Zeitschrift für elektr. Informations- und Energietechnik (1975), Teil 1: S. 307-318, Teil 2: S. 389-400, Teil 3: S. 401-434, (1976) Teil 4: S. 1-43, Teil 5: S. 193-218
- [16] NELDER, J.A. und MEAD, R.:
A simplex method for function minimization. Comp. J. 7 (1965), S. 308-313
- [17] REINSCH, CH.:
Smoothing by spline functions. Numer. Math. 10 (1967), S. 177 - 183
- [18] RIESS, R.:
Dissertation, Universität Erlangen - Nürnberg 1980 (in Vorbereitung)
- [19] SUITER, D.:
Empfindlichkeitsoptimierung und Toleranzanalyse elektrischer Netzwerke. Dissertation, Universität Erlangen - Nürnberg 1977

- [20] UNBEHAUEN, R.:
Synthese elektrischer Netzwerke. R. Oldenbourg Verlag, München
1972
- [21] UNBEHAUEN, R.:
Über die Synthese von Dämpfungsentzerrern in Form eines Über-
brückten T-Gliedes. Nachrichtentechn. Z. 19 (1966), S. 729-737
- [22] UNBEHAUEN, R.:
Über die Lösung der Approximationsprobleme bei der Synthese
elektrischer Zweipole. Habilitationsschrift, Technische Hoch-
schule Stuttgart 1962
- [23] UNBEHAUEN, R.:
Systemtheorie, Eine Einführung für Ingenieure. R. Oldenbourg
Verlag, München 1969
- [24] WEHRHAHN, E.:
Neue Analyse- und Optimierungsmethoden für den rechnergestütz-
ten Entwurf elektrischer Netzwerke. Habilitationsschrift,
Universität Erlangen - Nürnberg 1977
- [25] WEHRHAHN, E. und GAISSMAIER, B.:
Optimierung von Fehlerquadratsummen. Programmbeschreibung,
Lehrstuhl für Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik,
Universität Erlangen-Nürnberg 1973

Lebenslauf

3. 6. 1943 geboren in Ansbach/Mfr.
- 1949 - 1954 Besuch der Volksschule in Ansbach
- 1954 - 1963 Besuch der Oberrealschule in Ansbach
- 1963 - 1965 gelenktes Praktikum (Elektrotechnik) bei
Fa. Grundig GmbH, Fürth/Bayern
- 1965 - 1968 Studium der Elektrotechnik, Fachrichtung
Nachrichtentechnik, am Ohm-Polytechnikum
in Nürnberg
- 1968 - 1973 Studium der Elektrotechnik an der
Universität Erlangen-Nürnberg
- 1974 - 1980 wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl
für Allgemeine und Theoretische Elektro-
technik der Universität Erlangen-Nürnberg

Offset — 
Siebdruck
S.Kriegelstein

Bierlachweg 37 8520 Erlangen
Telefon 09131/33907